

非周期関数を係数に含むマシュー型 微分方程式の解の振動問題

石橋 和葵（広島商船高等専門学校）

異分野・異業種研究交流会 2021
2021年11月13日（土）

自己紹介

経歴

2009年4月－2013年3月
岡山理科大学 理学部 応用数学科 卒業
2013年4月－2015年3月
島根大学大学院 前期博士課程 総合理工学研究科 修了
2015年4月－2018年3月
島根大学大学院 後期博士課程 総合理工学研究科 修了
2018年4月－現在
広島商船高等専門学校 電子制御工学科 助教

所属学会

日本数学会（函数方程式分科会）

研究分野

常微分方程式論，差分方程式論

研究の動機と大まかな位置付け

動機と位置付け

制御工学と関係が深い周期関数を係数にもつマシュー微分方程式の解の振動問題の歴史は古く、膨大な数の研究がある。しかし、現実モデルを反映させた非周期関数を係数にもつマシュー方程式に対しては、既存の振動判定法はこれまでの先行結果では適用できず難点が多い。そこで、一般化したマシュー微分方程式の解構造を振動・非振動の観点から精密に解析することを研究の主目的としている。

特に、工学分野では、倒立振子の動きを予測する道具としてマシュー微分方程式がよく利用されており、本研究で得た新しい振動・非振動判定法は制御工学分野への発展に寄与できる。

研究背景とマシュー方程式（周期系常微分方程式）

近年、倒立振り子型の乗り物が世の中に普及しているが、

問題点1

倒立振り子型車両の多くは平らな場所での展示やデモンストレーションは行なっているが、**段差や砂利道など、凹凸のある路面における乗り物の安定性に関する学術的検討があまりされていない**

対応策

凸凹な路面における転倒防止対策が必要
例えば、**数理モデリング**

モデリングに必要な要素

台車質量： M 振り子質量： m

振り子長さ： l 振り子慣性モーメント： J

台車は制御力 F_x によって直線上を左右に動く

タイヤをばね定数 k とみなし、**上下方向にも動く**

運動の第2法則により、数理モデリングした倒立振り子型の運動方程式はマシュー微分方程式であることがよく知られている！

マシュー微分方程式

$$\theta''(t) + (-\alpha + \beta \cos(\gamma t))\theta(t) = 0$$

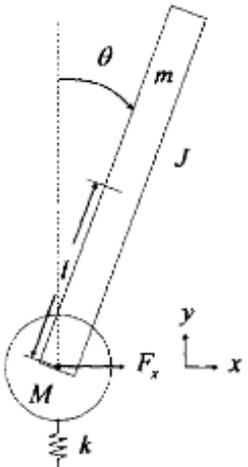
大雑把に↑の方程式を紹介すれば...

時間 t に依存した $\theta(t)$ は揺れの変位
 α は振り子の長さに関係

周期関数 $\beta \cos(\gamma t)$ の積分が**上下方向のスピード**に関係

問題点2

より現実モデルに近い場合、スピードは周期的に安定しないため**非周期関数**が適切



研究目的と振動問題

本研究では、一般化したマシュー微分方程式

$$\theta''(t) + (-\alpha + \beta \cos(\rho t) + f(t))\theta(t) = 0 \quad (1)$$

を考える。ただし、 α と β は実数、 ρ は正の実数、関数 $f(t)$ は次の条件を満たす。

有界関数：関数 $f(t)$ は $|f(t)| \leq f^*$ を満たす正の実数 f^* が存在する。

研究目的：方程式(1)がもつ実数パラメータから、倒立振り子型の振り子の揺れの変位 $\theta(t)$ の振動性を考えて、数学的な条件を導出する。

振動問題（定義：**振動解**と**非振動解**に分類）

方程式(1)の解が**振動する**（**振動解**）とは自然数 n に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty \text{ かつ } \theta(t_n) = 0$$

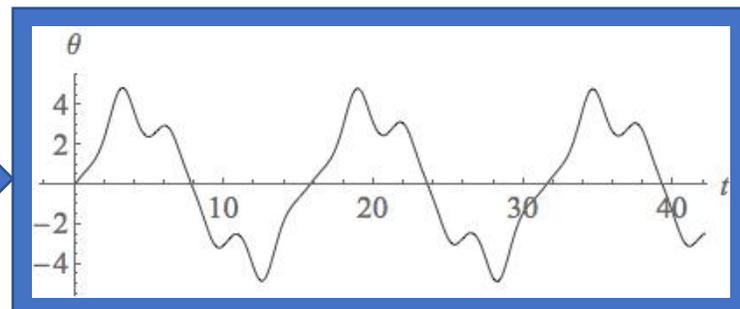
を満たすこと。

→ つまり、振り子は揺れ続ける

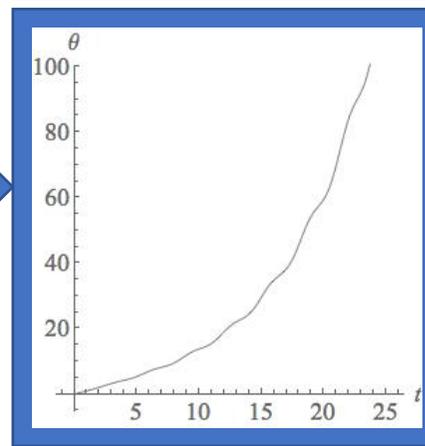
方程式(1)の解が**振動しない**（**非振動解**）とは任意の t に対して、 $\theta(t) > 0$ または $\theta(t) < 0$ を満たす、十分大きな時刻 $t \geq T$ が存在すること。

→ つまり、振り子は倒れる

振動解の
イメージ図



非振動解の
イメージ図



主結果

- (i) $\alpha - f^* \geq |\beta|$ ならば, 方程式 (1) の解は**振動しない**
- (ii) $\alpha < 0, \alpha + f^* \leq 0$ ならば, 方程式 (1) の解は**振動する**
- (iii) $\alpha + f^* \geq |\beta|$ かつ $|\beta| \geq \rho\sqrt{2(\alpha + f^*)} + \alpha + f^*$ ならば, 方程式 (1) の解は**振動する**
- (iv) $\alpha - f^* \geq |\beta|$ かつ $|\beta| \leq \frac{\rho\sqrt{2(\alpha - f^*)}}{2} + \alpha - f^*$ ならば, 方程式 (1) の解は**振動しない**

例 (非周期関数を係数にもつ方程式 (1))

$$\theta''(t) + (-\alpha + \beta \cos(\rho t) + f(t))\theta(t) = 0$$

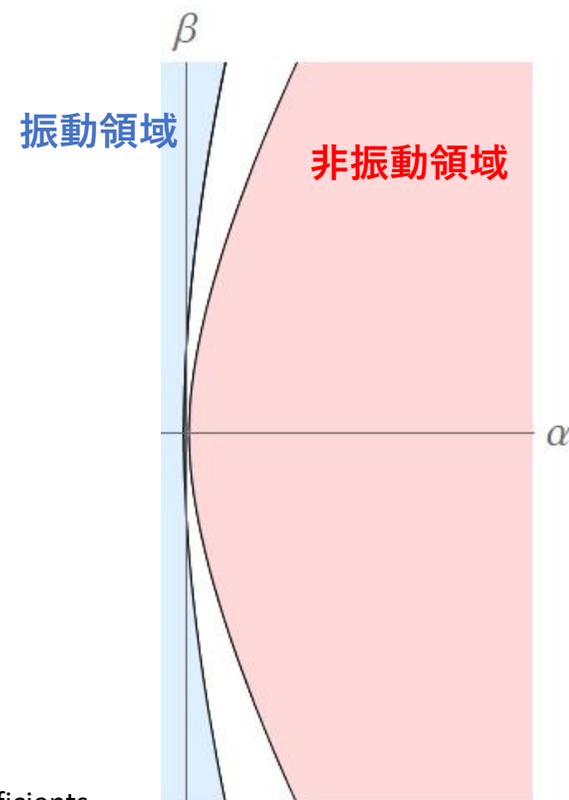
$$f(t) = \frac{1}{256} \cos(\log(2t + 1)) + \frac{1}{256} \cos\left(\log\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}t + 1\right)\right)$$

関数 $f(t)$ は $|f(t)| \leq \frac{1}{128}$ を満たす正の実数 $f^* = \frac{1}{128}$ が存在

倒立振子型の振り子への応用

非振動領域ならば, 倒立振子型の振り子は倒れる

振動領域ならば, 倒立振子型の振り子は揺れ続ける



参考文献

K. Ishibashi, Non-oscillation criterion for generalized Mathieu-type differential equations with bounded coefficients, accepted for publication in *Proceedings of the American Mathematical Society* on 22 April 2021. (doi.org/10.1090/proc/15626)

主結果の証明方法の概略

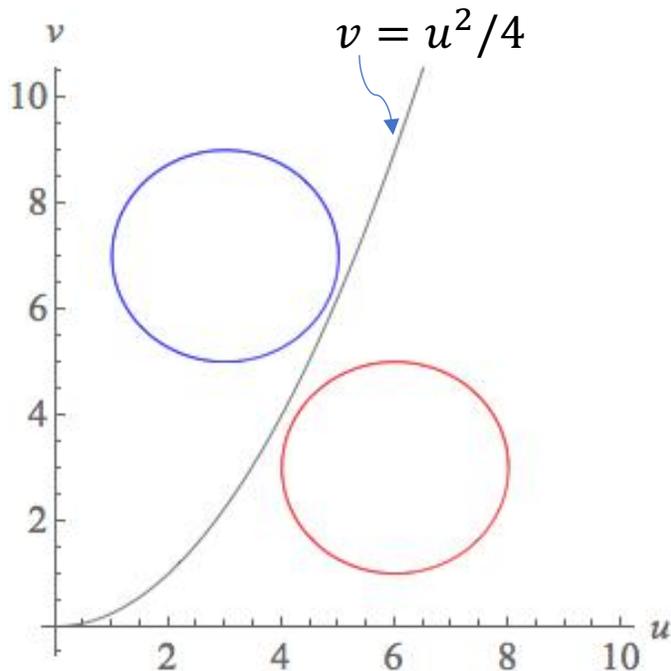
Step 1 方程式 (1) を方程式 (2) に同値変換して解析する

$$(1) \theta''(t) + (-\alpha + \beta \cos(\rho t) + f(t))\theta(t) = 0 \quad \xrightarrow{\text{変換}} \quad (2) \underbrace{x''(t)}_u + \underbrace{a(t)x'(t)}_v + \underbrace{b(t)x(t)}_v = 0$$

同値変換の条件： $b(t) - \frac{a^2(t)}{4} - \frac{a'(t)}{2} = -\alpha + \beta \cos(\rho t) + f(t)$

同値条件を満たす方程式(2)の係数関数 $a(t)$ と $b(t)$ を見つけることが重要

Step 2 幾何学的アプローチ



同値変換後の方程式 (2) の係数間のパラメータ曲線の位置により、方程式 (2) の振動解と非振動解を分類した。
ただし、パラメータ曲線が留まる領域は必ず第1象限内に限定されている。

この分類方法は次の解析方法を利用する

- リッカチ手法
- 相平面解析 ☆ 数値実験が鍵となる

$(a(t), b(t))$ のパラメータ曲線に対して、

- (i) $v > u^2/4$ ならば、方程式(2)の解は振動しない
- (ii) $v \leq u^2/4$ ならば、方程式(2)の解は振動する

方程式(2)の解の振動性がわかれば、
同じ条件で方程式(1)の解の振動性もわかる