頂点重み付きグラフ上の探索問題の難しさ

九州大学大学院数理学府　博士後期課程2年[1]　石塚天[2]

1. 導入

アルゴリズムは，現代社会に欠かせない存在である．パソコンやスマホも，アルゴリズムに基づいて処理を行う．

実社会の問題を効率的に解くアルゴリズムの開発は，科学技術，産業，社会基盤など様々な分野で求められている．

計算量理論は，計算問題の本質的な難しさを解き明かし，効率的なアルゴリズムを設計する指針を与える．

計算量理論の目標：計算問題の難しさを定量的に評価し，効率的なアルゴリズムの有無を明確にすること．

計算問題の難しさは，

- コンピュータが処理に要する時間
- コンピュータが処理に要するメモリサイズ

を用いて，定量的に評価される．

補足：本発表は，Journal of Computer and System Sciencesで出版された内容である．論文はこちら[Ish21].

[1] 学振特別研究員DC2

[2] E-mail: ishizuka.takashi.664@s.kyushu-u.ac.jp ; HP: https://t-ishizuka.tumblr.com ; CV: https://researchmap.jp/t-ishizuka

1.1. 研究の位置付け

数学および計算機学の重要な未解決問題として，P vs. NP問題がある．

探索問題することで，計算量クラスPとNPの間にある計算問題の難しさを詳細に捉えることができる（図1参照）．

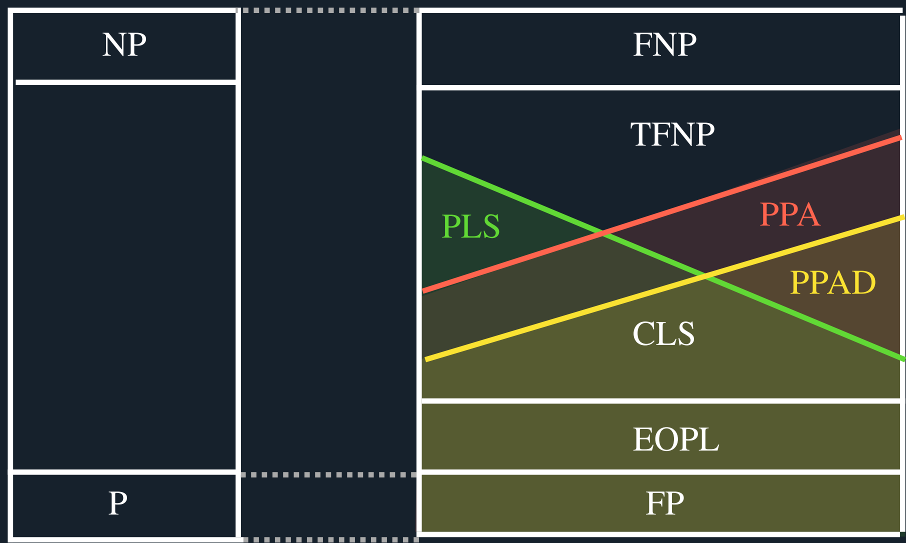

図1．計算量クラス．左は判定問題のクラス；右は探索問題のクラス．下にある計算量クラスより，上にある計算量クラスの方が，難しい計算問題に対応する計算量クラスである．

1.2. 主結果

本研究は，探索問題のふたつの計算量クラスPPADとPLSの共通部分にある計算量クラスEOPLに対する理解を深める．

次のような計算問題(PotentialOdd)を考える：

入力：頂点重み付き無向グラフ $G(d, m, N, V) = (\Sigma^n, E)$
奇数次数頂点 $\pi \in \Sigma^n$

出力：以下のいずれかを満たす頂点$x \in \Sigma^n$
(1) $x \neq \pi$ and xは奇数次数頂点
(2) $V(x) \geq V(y)$ for every $y \in N(x)$ with $\{x, y\} \in E$
(3) $V(x) \leq V(y)$ for every $y \in N(x)$ with $\{x, y\} \in E$

本研究で得られた結果は以下の通り：

- $d \leq 3$ のとき，PotentialOddはEOPL完全である．
- $d \geq 4$ のとき，PotentialOddはPPA∩PLS完全である．

1.3. 先行研究

- OddはPPA完全である[Pap94]
- EndOfLineはPPAD完全である[Pap94]
- ImbalanceはPPAD完全である[GH21]
- CLS = PPAD∩PPAD [FGHS21]

2. 計算量クラスTFNP

計算量クラスTFNPは完備探索問題全体のクラスである．

定義1（完備探索問題 $R \subseteq \{0,1\}^* \times \{0,1\}^*$）
入力：文字列 $x \in \{0,1\}^*$
出力：文字列 $y \in \{0,1\}^*$ s.t. $(x, y) \in R$

完備探索問題 $R \subseteq \{0,1\}^* \times \{0,1\}^*$ は，次の条件を満たす：

(1) 任意の入力 x に対して，$(x, y) \in R$ を満たす文字列 y が少なくともひとつ存在する；
(2) 任意の $(x, y) \in \{0,1\}^* \times \{0,1\}^*$ に対して，$(x, y) \in R$ は多項式時間で検証できる；
(3) 任意の$(x, y) \in R$に対して，$|y| \leq \mathrm{poly}(|x|)$が成り立つ．

探索問題 R から S への多項式時間帰着 $R \leq_P S$ は，ふたつの多項式時間計算可能函数 $f, g : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ を用いて，次のように定義する：

(1) R の入力 $x \in \{0,1\}^*$に対して，$f(x)$ は S の入力である．
(2) 入力 $f(x)$ に対する S の適当な解 y について，$g(x, y)$ は，R の入力 x に対する解である．

探索問題 $R \in \mathscr{C}$ が$\mathscr{C}$完全である iff $S \leq_P R \quad \forall S \in \mathscr{C}$.

3. 簡潔に表現されたグラフ

本研究では，指数個の頂点をもつグラフ上の探索問題を考える．このとき，グラフを簡潔に表現する．つまり，グラフの構造を近傍函数 $N\colon \Sigma^n \to \Sigma^{dn}$ で説明する．

定義2 頂点重み付き無向グラフ$G(d,m,N,V) = (\Sigma^n, E)$

近傍函数 $N\colon \Sigma^n \to \Sigma^{dn}$；重み函数 $V\colon \Sigma^n \to [2^m]$

ここで，$E := \left\{\{x,y\} \subseteq \Sigma^n; x \neq y, y \in N(x), x \in N(y)\right\}$

有向グラフでは，ふたつの函数 $S\colon \Sigma^n \to \Sigma^{dn}$, $P\colon \Sigma^n \to \Sigma^{dn}$を用いてグラフの構造を説明する：

定義3 頂点重み付き有向グラフ$G(d,m,S,P,V) = (\Sigma^n, E)$

近傍函数 $S\colon \Sigma^n \to \Sigma^{dn}$, $P\colon \Sigma^n \to \Sigma^{dn}$；重み函数 $V\colon \Sigma^n \to [2^m]$

ここで，$E := \left\{(x,y) \in \Sigma^n \times \Sigma^n; x \neq y, y \in S(x), x \in P(y)\right\}$

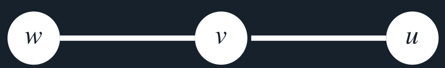

図2．簡潔に表現された無向グラフの例．グラフは，近傍函数Nで表現される．このとき，$N(v) = \{u, w\}$である．

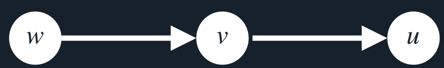

図3．簡潔に表現された有向グラフの例．グラフは，近傍函数S, Pで表現される．このとき，$S(v) = u$, $P(v) = w$である．

4. 計算量クラスEOPL

計算量クラスEOPLは，探索問題EndOfPotentialLineへ帰着可能な探索問題全体の集合である．

定義4（EndOfPotentialLine）

入力：頂点重み付き有効グラフ$G(1,m,S,P,V) = (\Sigma^n, E)$

既知の始点 $\pi \in \Sigma^n$ s.t. $S(\pi) \neq \pi = P(\pi)$ and $V(\pi) = 1$

出力：以下のいずれかを満たす頂点$x \in \Sigma^n$：

(1) $P(S(x)) \neq x$, i.e., x は終点である

(2) $S(P(x)) \neq x \neq \pi$, i.e., xは未知の始点である

(3) $S(x) \neq x$, $P(S(x)) = x$, and $V(S(x)) - V(x) \leq 0$

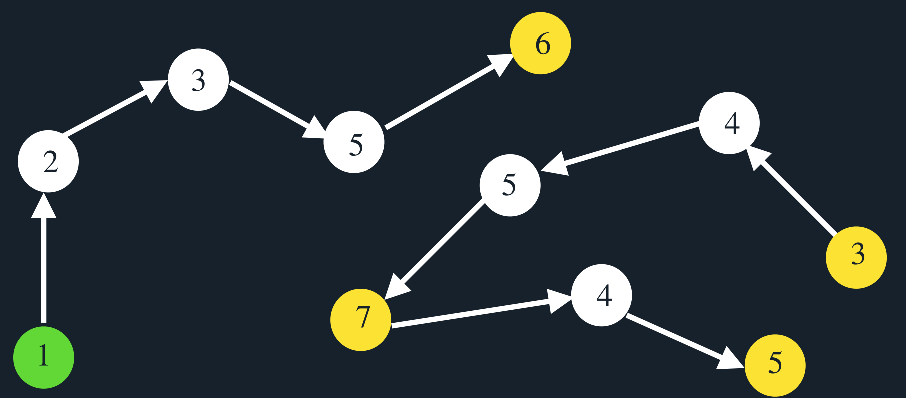

図4．EndOfPotentialLineの例．緑色の頂点は既知の頂点を表す．黄色の頂点がEndOfPotentialLineの解に対応する．

5. 主結果の証明

5.1. Degree-3 PotentialOdd

定理1. Degree-3 PotentialOddはEOPL完全である．

【証明の概略】
EOPL困難であることは明らか．したがって，EOPLに属することを示す．この証明の大部分は，chessplayer algorithm[Pap94]の手法に頼る．しかし，この手法では，既知の視点が2個以上生じてしまう．既知の視点が複数存在するときでも，EndOfPotentialLineはEOPLであることを証明することで，本定理の証明は完了する．

次の探索問題がEOPL完全であることを示す：

定義5（Multiple-Source EndOfPotentialLine）

入力：頂点重み付き有効グラフ$G(1,m,S,P,V) = (\Sigma^n, E)$

既知の始点のリスト $\Pi = \{\pi_1, \ldots, \pi_k\}$ s.t. for each

$\pi \in \Pi S(\pi) \neq \pi = P(\pi)$ and $V(\pi) = 1$

出力：以下のいずれかを満たす頂点$x \in \Sigma^n$：

(1) $P(S(x)) \neq x$, i.e., x は終点である

(2) $S(P(x)) \neq x \notin \Pi$, i.e., xは未知の始点である

(3) $S(x) \neq x$, $P(S(x)) = x$, and $V(S(x)) - V(x) \leq 0$

定理2. Multiple-Source EndOfPotentialLineはEOPL完全である．

【証明の概略】
EOPL困難であることは明らか．よって，EOPLに属することを示す．
いま，k個の既知の始点が与えられるケースを考える．この頂点重み付き有効グラフ$G(1,m,S,P,V) = (\Sigma^n, E)$を，既知の頂点が一つだけのグラフへ変更する．証明の基本的なアイデアは，k個の頂点の集合を一つの頂点とみなすことである．これは，[GH18]でEndOfLineの同様の変種の複雑さを議論した手法と同じである．
ダミーの頂点を加えることで，シミュレーションを実現する．図1に概略を示す．

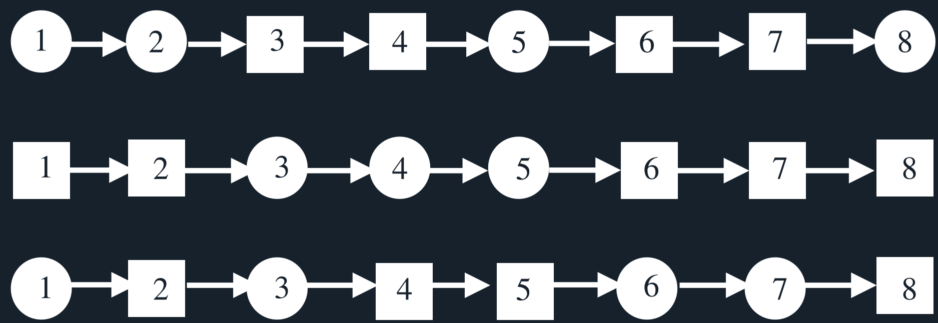

図5．丸の頂点はオリジナルの頂点．四角の頂点は追加したダミー．ダミーを追加することにより，次の二つの性質を満たす入力を作成する：(i) 各有向辺で重みが1だけ増加する；(ii)パスの長さが等しい．

5.2. Degree-4 PotentialOdd

定理3. Degree-4 PotentialOddはPPA∩PLS完全である.

【証明の概略】
一般のPotentialOddがPPA∩PLS完全であることを用いる；この証明は，[Ish21]を参照されたい.
本定理は次の主張を示すことで完了する：$d \geq 4$のDegree-d PotentialOddがDegree-4 PotentialOddへ帰着できる．次数が5以上の頂点を複数の頂点でシミュレートすることで帰着を実現する．図2で具体例を示す．このような変更を全ての頂点に対して行うことで，帰着を完了する.

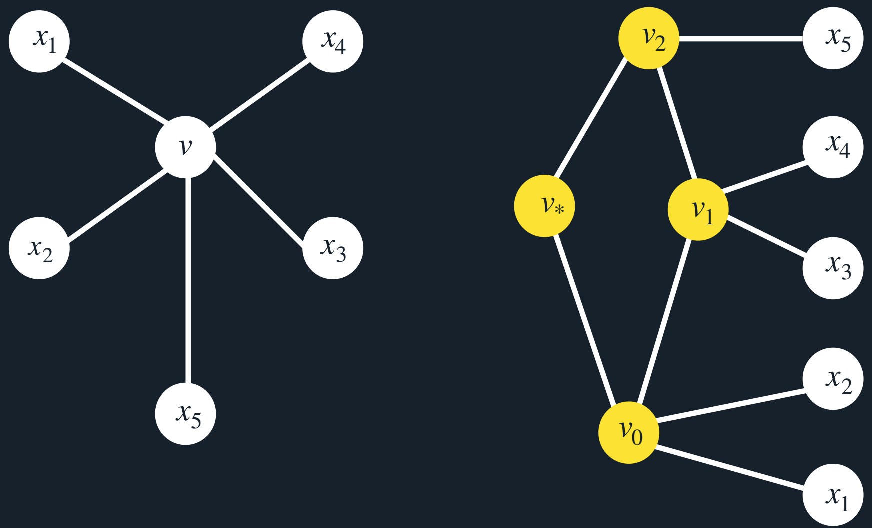

図6．いま，$x_i < x_j \forall i < j$ を仮定する．左のグラフの頂点vを，黄色の頂点でシミュレートする．このとき，以下の三つを満たす：$v_0 < v_1 < v_2$；$v_1 < v_* < v_2$；$v < x_i$; $v < x_i \Leftrightarrow v_i < v_i \forall i$.

6. 結論・今後の課題

本研究では，頂点重み付きグラフ上の探索問題Potential-Oddの難しさに焦点を当て，以下の結果を得た：

定理1. Degree-3 PotentialOddはEOPL完全である
定理3. Degree-4 PotentialOddはPPA∩PLS完全である

また，いくつかの課題を残している．たとえば，計算量クラスEOPLとPPA∩PLSの関係である．もし等価であることが示されれば，EOPL = CLSという別の未解決問題も解決することができる.

一方で，EOPL ≠ PPA∩PLSが示されると，P vs. NP問題に対する否定的な解決を得ることができる.

7. 参考文献

[FGHS21] J. Fearnley, P. W. Goldberg, A. Hollender, and R. Savani. “The Complexity of Gradient Descent: CLS = PPAD∩PLS,” STOC 2021.
[GH21] P. W. Goldberg and A. Hollender. “The Hairy ball problem is PPAD-complete,” J. Comput. Syst. Sci., Vol. 122, pp.34—62, 2021.
[Ish21] Takashi Ishizuka. “The complexity of the parity argument with potential,” J. Comput. Syst. Sci., Vol. 120, pp.14—41, 2021.
[Pap94] C. Papadimitriou. “On the Complexity of the Parity Argument and Other Inefficient proofs of Existence,” J. Comput. Syst. Sci., Vol.48(3), pp. 498-532, 1994.