圧縮性粘弾性流体方程式の解の長時間挙動と拡散波現象

発表者: 石垣 祐輔 (東京工業大学 理学院 数学系 研究員)
e-mail:ishigaki.y.aa@m.titech.ac.jp

研究分野

圧縮性粘弾性流体の運動を記述する非線形偏微分方程式の解の漸近挙動を対象とし, 通常の圧縮性粘性流体方程式 (圧縮性 Navier-Stokes 方程式) にない弾性力がどのように影響するかということを念頭に興味を持って研究している.

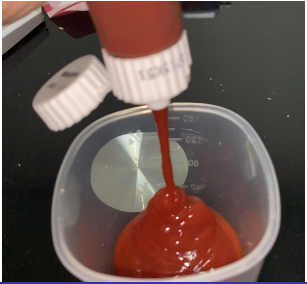
本発表の内容

3 次元全空間における圧縮性粘弾性流体方程式の静止定常解周りの解のふるまいを考察し, 先行研究で得られた摂動の L^p ノルムの時間減衰評価を改良する. これに伴い, 先行研究で考えられていなかった圧縮性粘弾性流体方程式のもつ音波・粘性拡散・弾性波の 3 者の相互作用で生じる" 拡散波" の現象も明らかにする.

本発表の大まかな流れ

- 圧縮性粘弾性流体方程式の紹介.
- 本発表の目的, 圧縮性粘弾性流体方程式の先行研究.
- 着眼点, 静止定常解まわりの線形化方程式.
- 主定理とその証明の概略.

身近な (圧縮性) 粘弾性流体の例 (ケチャップ):



圧縮性粘弾性流体とは, 密度変化 (圧縮性) を取り入れた粘弾性流体である.

(粘弾性流体の身近な例: クリーム, ジェル, 歯磨き粉)

その運動の (巨視的なスケールの下における) モデリングの 1 つとして, 以下の圧縮性 Navier-Stokes 方程式と輸送方程式の連立系で与えられる:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \mathrm{div}(\rho v) = 0, \\ \rho(\partial_t v + v \cdot \nabla v) = \nu \Delta v + (\nu + \nu')\nabla \mathrm{div} v - \nabla P(\rho) + \beta^2 \mathrm{div}(\rho F^\top F), \\ \partial_t F + v \cdot \nabla F = (\nabla v)F. \end{cases} \tag{1}$$

未知関数 (解)

- $\rho = \rho(x,t)$: 流体の密度 (位置 $x \in \mathbb{R}^3$, 時間 $t \geq 0$).
- $v = {}^\top(v^1(x,t), v^2(x,t), v^3(x,t))$: 流体の速度場.
- $F = (F^{jk}(x,t))_{1\leq j,k\leq 3}$: 流体の変形テンソル ($3 \times 3$ 行列値であり, 歪み具合を表す).

解の仮定

- $(\rho, v, F)|_{t=0} = (\rho_0, v_0, F_0)$. (初期条件)
- $\begin{cases} \mathrm{div}(\rho_0 {}^\top F_0) = 0, \ \rho_0 \det F_0 = 1, \\ \displaystyle\sum_{m=1}^{3} (F_0^{ml} \partial_{x_m} F_0^{jk} - F_0^{mk} \partial_{x_m} F_0^{jl}) = 0. \end{cases}$ (流体の質量が不変となる条件)
- $(\rho, v, F) \to (1, 0, I)$ as $|x| \to \infty$. (空間無限遠における境界条件)

パラメータなどの仮定

- $P = P(\rho)$: 圧力, ρ についてなめらか; $P'(1) > 0, \ \gamma := \sqrt{P'(1)}$.
- $\nu, \ \nu'$: 粘性係数: $\nu > 0, \quad 2\nu + 3\nu' \geq 0$.
- $\beta > 0$: 弾性波の伝播速度.
  (形式的に $\beta = 0$ とすると, 方程式系 (1) は圧縮性 Navier-Stokes 方程式になる.)

本発表の目的

- 方程式系 (1) の静止定常解 $(1,0,I)$ (I :3 次単位行列) まわりの解の挙動を調べる.
- 解に関する適切な定量的評価を導出し, 弾性力 $\beta^2\mathrm{div}(\rho F^\top F)$ による解の影響を明らかにする.

L^p ノルム, $W^{k,p}$ ノルムの定義

$\mathbb{R}^3\times(0,\infty)$ で定義された関数 $f=f(x,t)$ に対し, L^p ノルムと $W^{k,p}$ ノルムを定義する:

- $\|f(t)\|_{L^p}=\left(\int_{\mathbb{R}^3}|f(x,t)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\ (1\le p<\infty),\ \|f(t)\|_{L^\infty}=\mathrm{esssup}\{|f(x,t)|\mid x\in\mathbb{R}^3\}$
- $\|f(t)\|_{W^{k,p}}=\sum_{|\alpha|\le k}\|\partial_x^\alpha f(t)\|_{L^p}$ ($k:0$ 以上の整数, $1\le p\le\infty$)

先行研究

Hoff-Zumbrun (1995)

$\beta=0$ とし, $u(t)=(\phi(t),m(t))=(\rho(t),\rho(t)v(t))-(1,0),\ u_0=u(0)$ とおく.
$E:=\|u_0\|_{L^1}+\|u_0\|_{W^{4,2}}$ が十分小さければ

$$\cdot\ \|(\phi(t),m(t))\|_{L^p}\le\begin{cases}CE(1+t)^{-\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{p}\right)}, & 1\le p<2,\\ CE(1+t)^{-\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}, & 2\le p\le\infty.\end{cases}$$

$$\cdot\ \|(\phi(t),m(t))-(0,m_s(t))\|_{L^p}\le CE(1+t)^{-\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{p}\right)},2<p\le\infty.$$

ここで, $m_s=m_s(x,t)$ は $\partial_t m_s-\nu\Delta m_s=0,\ \mathrm{div}m_s=0$ を満たす.

Hu-Wu (2013), Li-Wei-Yao (2016)

$\beta>0$ とし, $u(t)=(\phi(t),w(t),G(t))=(\rho(t),v(t),G(t))-(1,0,I),\ u_0=u(0)$ とおく.
$E:=\|u_0\|_{L^1}+\|u_0\|_{W^{3,2}}$ が十分小さければ

$$\|u(t)\|_{L^p}\le CE(1+t)^{-\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)},\ 2\le p\le\infty.$$

着眼点

- $(1+t)^{-\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}$ は熱方程式 $\partial_t u - \nu\Delta u = 0$ の解 u の L^p ノルムの減衰率に当たる.
- $\beta = 0$ の場合, Hoff-Zumbrun(1995) で導出された L^p ノルムの減衰評価より, 圧縮性 Navier-Stokes 方程式の持つ粘性拡散による熱方程式の側面と音波による波動方程式の側面の両方を取り出している.
- $\beta > 0$ の場合では, 粘性拡散による熱方程式の側面しか明らかにしていない (改良の余地がある). 特に, 弾性力 (あるいは弾性波) による解の挙動への影響も分からない.

線形化問題 $u(t) = (\phi(t), w(t), G(t)) = (\rho(t), v(t), G(t)) - (1, 0, I)$ に関する方程式より, 非線形項 (十分小) を除いた以下の線形の方程式系を考える:

$$\partial_t u + Lu = 0,\ u = \begin{pmatrix} \phi \\ w \\ G \end{pmatrix},\ L = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{div} & 0 \\ \gamma^2\nabla & -\nu\Delta - (\nu+\nu')\nabla\mathrm{div} & -\beta^2\mathrm{div} \\ 0 & -\nabla & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

方程式系 (2) より, w の方程式に Helmholtz 射影 $P = \mathcal{F}^{-1}(I - \frac{\xi^\top\xi}{|\xi|^2})\mathcal{F}$ ($\mathcal{F}^{-1}$ と $\mathcal{F}$ はそれぞれ, フーリエ逆変換とフーリエ変換である) を施す. これより, w の非圧縮部分 w_s $(\mathrm{div} w_s = 0)$ は

$$\partial_t w_s - \nu\Delta w_s = 0 \qquad (\beta = 0,\ \text{熱方程式}),$$
$$\partial_t^2 w_s - \beta^2\Delta w_s - \nu\partial_t\Delta w_s = 0 \ (\beta > 0\ \text{強消散型波動方程式})$$

を満たす. これより, 線形解の非圧縮部分のふるまいは熱方程式 $\partial_t w_s - \nu\Delta w_s = 0$ と波動方程式 $\partial_t^2 w_s - \beta^2\Delta w_s = 0$ の基本解の合成 ($\leftrightarrow$" 拡散波" $e^{-\frac{\nu}{2}|\xi|^2 t}e^{\pm i\beta|\xi|t}$) で記述できる.
(音波による影響は圧縮部分のみで, 弾性波による影響は非圧縮部分・圧縮部分の両方に及ぶ)

以上のアイデアをもとに, 先行研究 (Hu-Wu (2013), Li-Wei-Yao (2016)) の結果を改良・拡張した.

主定理 (Y. I., J. Differential Equations (2020) & arXiV:2106.15266(2021))

$u_0 = (\phi_0, w_0, G_0) = (\phi_0, v_0, F_0) - (1, 0, I)$ とする. F_0 の逆行列 F_0^{-1} は, あるベクトル場 X_0 を用いて $F_0^{-1} = \nabla X_0$ と書けると仮定する. このとき, $\|u_0\|_{L^1} + \|u_0\|_{W^{4,2}}$ が十分小さく, $u_0 \in W^{2,1}$ であれば, 以下の評価が成り立つ:

$$\|u(t)\|_{L^p} \leq C(1+t)^{-\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{p}\right)}(\|u_0\|_{W^{2,1}} + \|u_0\|_{W^{4,2}}), \ 1 \leq p \leq \infty, \ t \geq 0.$$

ここで, $C > 0$ は p と t に依らない正定数である.

証明の概略

Step 1: $e^{-tL}u_0$ を線形化問題 $\partial_t u + Lu = 0, \ u|_{t=0} = u_0$ の解とし, その L^p ノルムの評価を導出して, 非線形問題の解の (大まかな) ふるまいを推定する.

Step 2: Step 1 では ϕ_0 と G_0 に関する線形条件 $\phi_0 + \mathrm{tr}G_0 = 0$ のもとで得るが, 非線形項は同様に満たしているかが分からないため, u に関する時間発展方程式を積分方程式に書き換えて示すことが難しい. 困難点の解消のため, 物質座標変換を導入して, 問題をうまく定式化する.

Step 3: Step 2 と非線形条件 $\rho_0 \det F_0 = 1$ より, $\phi(t)$ と $G(t)$ はある (変位) ベクトル $\psi(t)$ を用いて,

$$\phi = -\mathrm{div}\psi + O(|\nabla\psi|^2), \ G = \nabla\psi + O(|\nabla\psi|^2), |\nabla\psi| \ll 1$$

とできる. これより, $(\phi(t), w(t), G(t))$ の代わりに, $(\tilde{\phi}(t), w(t), \tilde{G}(t)) := (-\mathrm{div}\psi(t), w(t), \nabla\psi(t))$ の挙動に着目すればよい. $\tilde{\phi}(t)$ と $\tilde{G}(t)$ の方程式の非線形項も, ϕ_0 と G_0 に関する線形条件を満たしているため, 問題点を解消して, 主定理を得る.