量子群と幾何学

京都大学理学部数学教室博士課程 1 年

池田 湧哉

2021 年 11 月 13 日

概要

量子群は物理的な背景を持つ概念で, いくつかの複雑な関係式で定義される代数的な構造である. これは物理的な要請のもとに作られたもので, 数学的に何らかの由緒正しい解釈を持つかどうかというのは明らかではなかった. しかし 1990 年, Ringel は箙の表現の圏から量子群の一部が構成できることを示し, 量子群が数学的に自然な概念であると信じられる根拠の一つとなった.

さらにこれより以前にあった「幾何学を使って表現論を調べる」という考え方と結び付くことで, 量子群やその表現を箙にまつわる幾何学として考えるということが行われるようになった.

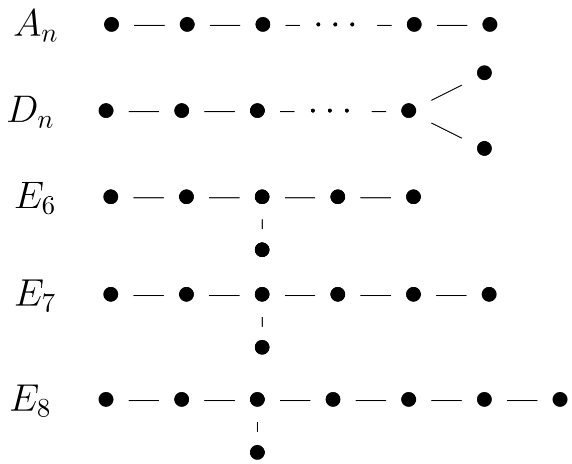
このような考えに基づき, 量子群の表現に存在する対称性を幾何的な言葉を使って記述することを目標としている.

1　リー環

1950 年代までの一連の研究において有限次元単純リー環の分類の決め手はリー環からルートデータという本質的なデータを取り出したことであった.

有限次元単純リー環の分類

(対称的な) 有限次元単純リー環は次のような Dynkin 図形によって分類される:



Dynkin 図形は有限次元リー環のルートデータの情報を取り出したものである. 1960 年代になると, 逆に抽象的に定義された一般のルートデータから有限次元とは限らないリー環を構成する方法が考えられた. これが Kac-Moody リー環である.

ルートデータ

ルートデータは次のような情報からなり適切な条件を満たすようなもののことである:

- ウェイト格子 P
- P と双対 $P^\vee$ のペアリング
- 有限集合 I
- I 個の単純ルートと単純コルート
- P 上の双線形形式 $(\cdot,\cdot)$

単純ルートと単純コルートのペアリングによる値を決める $I \times I$ 行列 $C = (c_{kl})$ を **Cartan 行列**と呼ぶ.

現代ではリー環の話をする前にはルートデータをひとつ固定するのが一つのスタイルとなっている. それに倣って, 以下では上のような一つのルートデータを固定したものして話を進める.

ルートデータを決めるとそれに付随して Weyl 群 W という群が定まる. これは I の各頂点に対応する「鏡映」によって生成される群である. リー環の理論にはさまざまなところにこの Weyl 群による対称性が現れる. Weyl 群はこのポスターの最後の節で再び登場する.

2 量子群

量子群とはリー群をパラメータ q によって「変形」したものである．とは言ってもリー群そのものを実際に変形することは難しい．そこで群上の関数環やその双対である普遍包絡環を変形するという構成が考えられた.

量子群の定義

量子群とは $\mathbb{C}(q)$ 上の代数であって, 次のような生成元と関係式によって与えられるもののことである:

生成元 : $q_{h_k}, e_k, f_k \ (k \in I)$

関係式 :

- $q^{h_k}q^{h_l} = q^{h_l}q^{h_k}$
- $q^{h_k}e_lq^{-h_k} = q^{c_{kl}}e_k, \quad q^{h_k}f_lq^{-h_k} = q^{c_{kl}}f_k$
- $e_kf_l - f_le_k = \delta_{kl}\dfrac{q^{h_k}-q^{-h_k}}{q-q^{-1}}$
- q-Serre 関係式と呼ばれる関係式

この構成は物理的な要請に応えるべく 1985 年ごろに Drinfeld と神保によって与えられたものである．では量子群をこのように定義する数学的に自然な理由はあるだろうか?

3 箙の表現

箙の表現

箙 $Q = (I, \Omega)$ とは有向グラフのことであり, I は頂点集合, Ω は矢印の集合である.

箙の表現とは, I の各頂点にベクトル空間, Ω の各頂点に行列を乗せたもののことである.

なぜ急に箙の表現論の話を始めたかというと, 次のような古い結果があるからである:

Gabriel の定理 (1972)

箙 Q の直既約表現が有限個 $\Leftrightarrow$

Q から矢印の向きを忘れたグラフが A, D, E 型いずれかの Dynkin 図形になる.

では Dynkin 箙 Q の表現から対応する有限次元リー環 $\mathfrak{g}_Q$ を復元することはできるだろうか?

4 Ringel-Hall 代数

Ringel-Hall 代数 (1990)

箙 Q の有限体 $\mathbb{F}_q$ 係数の表現たちのなすアーベル圏に対して Hall 代数を取ったものを $\mathcal{H}_q(Q)$ とかく．これを **Ringel-Hall 代数**と呼ぶ.

Hall 代数の定義は省略するが, アーベル圏の 2 つの対象に対してそれらの拡大がどれくらいあるかを数えて, q に依存した積構造を定義する.

リー環や量子群の復元

$\mathcal{H}_q(Q)$ について

- $q = 1$ とすると普遍包絡環の下半分 $U^-(\mathfrak{g})$ が得られる.
- q を不定元とすると量子群の下半分 $U^-_{\sqrt{q}}(\mathfrak{g})$ が得られる.

これが量子群という概念が数学的にも重要であることが信じられるようになる根拠の一つとなった.

この構成には幾何的な解釈があることが知られている.

5 幾何的実現

箙の表現は行列の組によって決まるので, 行列の成分を座標として表現を多様体の点と考え, 各頂点の上のベクトル空間の GL(これを G とかく) が作用しているという描像を考えることができる.

Ringel-Hall 代数の幾何的実現

箙の表現全体のなすアファイン空間 M 上の G-不変関数たちが畳み込み積に関してなす代数 $K(Q)$ は Hall 代数 $\mathcal{H}_q(Q)$ で q を 1 としたものと同型である.

この構成は Lusztig によって箙の表現のなす空間の上の局所定数層の複体を使った実現へとアップグレードされ箙の幾何学の始まりとなった．90 年台半ばの中島箙多様体の発見によって箙の幾何学は Springer 理論に端を発する幾何的表現論と結びついた.

ここまでは箙の幾何学のおこりについて話をしたが, 幾何的表現論の説明の代わりにクリスタルの幾何的実現を考えることにする.

6 クリスタル

クリスタルとは量子群の表現において $q \to 0$ としたときに現れる組合せ論的な対象で 1991 年に柏原によって導入された．たとえば表現のテンソル積の計算など量子群の表現を調べる上では重要である．

正ウェイト λ を最高ウェイトにもつ量子群の既約表現 $V(\lambda)$ について，そのクリスタル $B(\lambda)$ を考えよう．

斎藤によるクリスタルの幾何的実現 (2002)

$B(\lambda)$ は中島箙多様体 $\mathfrak{M}(\lambda)$ の冪零部分多様体 $\mathfrak{L}(\lambda)$ の既約成分の集合として実現できる．

7 クリスタルへの Cactus 群作用の幾何的実現

筆者の研究対象は Cactus 群という離散的な群であり，これは種数 0 の安定曲線のモジュライ空間の基本群として最初に知られたものである．一方でこの群はルートデータに付随して定義できることがわかった．

大雑把にいうと，各頂点に関する鏡映で生成されるのが Weyl 群であったのに対して，たくさんの頂点をいっぺんに鏡映することまで許したのが Cactus 群である．

この群は I の各部分集合 J に対応して決まる Schützenberger 対合という対合によって量子群の既約表現のクリスタルに作用することが知られている．これを幾何的なレベルに持ち上げるのが筆者の研究である．

筆者の結果

考えるルートデータは Dynkin とする．

- $\mathfrak{M}(\lambda)$ の自己同型 ξ が存在して ξ は $B(\lambda)$ の I 全体に対応する Schützenberger 対合を誘導する．
- 幾つかの箙多様体の射の列があって，それらによる冪零部分多様体の既約成分の像や逆像をとる事によって全ての Schützenberger 対合を実現することができる．

参考文献

[1] *M. Davis, T. Januszkiewicz, and R. Scott, Fundamental groups of blow-ups*, Adv. Math. 177 (2003), no. 1, 115–179.

[2] *I. Halacheva, J. Kamnitzer, L. Rybnikov, A. Weekes, Crystals and monodromy of Bethe vectors*, Duke Math. J. Volume 169, Number 12 (2020), 2337-2419.

[3] *A. Henriques, J. Kamnitzer, Crystals and coboundary categories*, Duke. Math. J. 132 (2009), no. 2, 191–216.

[4] *M. Kashiwara, Crystal bases of modified quantized enveloping algebra*, Duke Math. J. 73 (1994), 383–413.

[5] *A. Kirillov, Quiver representations and quiver varieties.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2016.

[6] *G. Lusztig, Quivers, perverse sheaves, and quantized enveloping algebras.* J. Amer. Math. Soc. 4 (1991), no. 2, 365–421.

[7] *G. Lusztig, Introduction to quantum groups*, Progress in Mathematics, vol. 110, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1993.

[8] *H. Nakajima, Quiver varieties and Kac-Moody algebras*, Duke Math. 91 (1998), 515–560.

[9] *Y. Saito, Crystal bases and quiver varieties*, Math. Ann. 324 (2002), 675–688.