連続時間確率過程のモデル検査

大阪大学基礎工学研究科システム創成専攻 D2

池田光優

現象の数理モデル

システムを数学で記述
- 化学反応
- プログラム
- 電子回路
- ロボット

etc…

＋

時相様相論理

システムに要求する複雑な性質を記述

$$\phi$$
$$not\ \phi$$
$$\phi_1\ and\ \phi_2$$
$$\phi_1\ U_I \phi_2$$
$$etc\ \ldots$$

- Amir Pnueli (Turing Award 1996)
- Ed Clarke, Alan Emerson, Joseph Sifakis (Turing Award 2007)

目的：システムの欠陥を早期に行い、開発コストやリスクを抑える

過去の失敗例：
- Therac-25の被ばく事故
- Intel Pentium II のバグ
- Ariane-5打ち上げ失敗

etc…

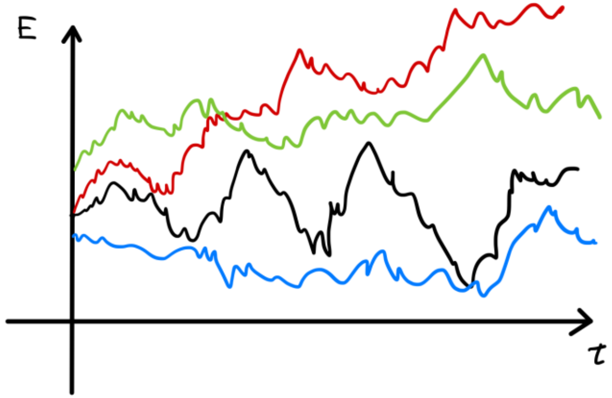
モデル検査によって事前に抑止[1]

確率的モデル検査のフレームワーク

数理モデル：連続時間確率過程(ノイズを考慮したダイナミクス)　$X: \Omega \times [0, \infty) \to E$ (Eは状態空間)

- 連続時間Markov chain(交通事故などのイベント発生モデル)
- Random ODE(初期値がランダムな微分方程式：タンパク質の生成モデルなど)
- SDE(確率微分方程式：株価の変動モデルなど)

etc…



時相様相論理のsyntax(ルール)：(例)

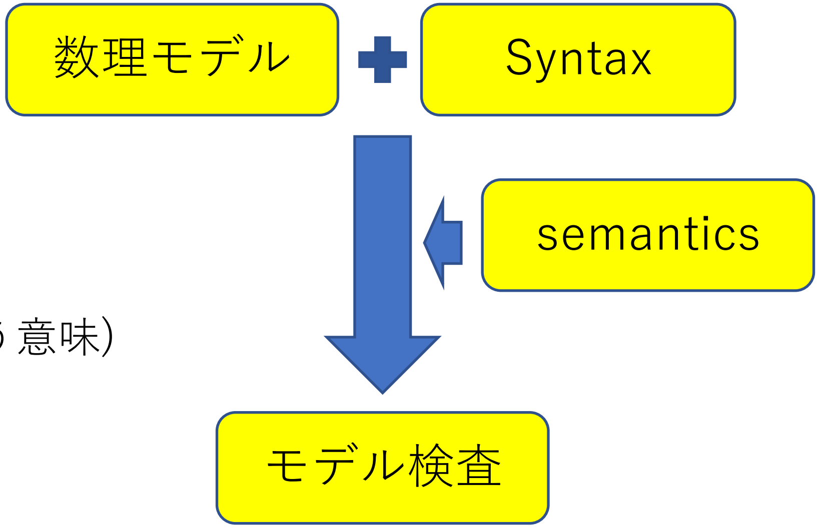
$$\phi ::= a \mid not\ \phi \mid \phi_1 \wedge \phi_2 \mid \phi_1 U_I \phi_2$$

LTLが許容する構文は上記のルールから帰納的に生成される：

$$\phi = not(\phi_1 \vee (\phi_2 U_I \phi_3)), (\phi_1 U_I (not\ \phi_2 \wedge \phi_3)) U_I \phi_4, etc \ldots$$ （いくらでも複雑にできる）

時相様相論理のsemantics：

- 上記のsyntaxは「記号の並び方」のルールでしかない
- LTL のsyntaxに「意味」を付与し、数理モデルと関連付けるのがsemantics



$$X, t \vDash \phi$$

(「確率過程Xは、時刻tにて性質ϕを満たす」という意味)

⇨ 数理モデルに複雑な性質”ϕ”を要求できる

確率的モデル検査の先行研究[2]

タンパク質などの生成モデル(Biochemical Network)

- 数理モデル：初期値がランダムな微分方程式（dは自然数.）

$$dX_i(t) = f_i(X_1(t), \cdots, X_d(t), \theta_1, \cdots, \theta_d)dt, \qquad i = 1, \cdots, d$$

時相様相論理のsyntax：（$T > 0$は固定，$0 < L_i < U_i < \infty$）

$$atom: (l, u, i), \qquad L_i \leq l < u \leq U_i \ for\ any\ i = i, \cdots, d.$$

$$\phi ::= \text{atom} \mid not\phi \mid \phi_1 \wedge \phi_2 \mid \phi_1 U^{\leq t} \phi_2 \mid \phi_1\ U^t \phi_2$$

構文の例：

$$not\ (l_1, u_1, 1)\mathrm{U}^t\big((l_2, u_2, 2) \wedge (l_3, u_3, 3)\big), \qquad (\mathrm{L_i} \leq l_i < u_i \leq U_{i,}\ \ i = 1,2,3)$$

Semantics：（$t = 1, \cdots, T$.離散的な時間にのみ言及）

本研究ではこれを連続時間に変更
⇨現実の問題との親和性が良くなる

$$X, t \vDash (l, u, i) \ \Leftrightarrow l \leq X_i(t) \leq u$$
$$X, t \vDash not\phi \ \Leftrightarrow not\ X, t \vDash \phi$$
$$X, t \vDash \phi_1 \wedge \phi_2 \Leftrightarrow X, t \vDash \phi_1\ and\ X, t \vDash \phi_2$$
$$X, t \vDash \phi_1\ U^{\leq s} \phi_2 \Leftrightarrow There\ exists\ t \in \{1, \cdots, T\}$$
$$such\ that\ X, t + s \vDash \phi_1\ and\ X, t' \vDash \phi_2\ for\ any\ t' = t, \cdots, t + s$$
$$X, t \vDash \phi_1 U^s\ \phi_2 \Leftrightarrow X, t + s \vDash \phi_2\ and\ X, t' \vDash \phi_1\ for\ any\ t' = t, \cdots, t + s$$

Semanticsの例：

- $X, t \vDash (l_1, u_1, 1) \wedge not(l_2, u_2, 2)$：$l_1 \leq X_1\ (t) \leq u_1$かつ$[X_2(t) < l_2$または$l_2 < X_2]$
- $X, t \vDash (l_1, u_1, 1)U^s(l_2, u_2, 2)$：
  $l_2 \leq X_2(t + s) \leq u_2$かつ$l_1 \leq X_1(t) \leq u_1$かつ$l_1 \leq X_1(t + 1) \leq u_1$かつ$\cdots l_1 \leq X_1(t + s - 1) \leq u_1$

本研究のフレームワーク

- 数理モデル：連続確率過程(連続時間確率過程のうち，経路が連続であるもの)

$X \coloneqq \{X(t), 0 \leq t < \infty\}$：それぞれの$t$において，$X(t)$はランダム．ただし$t$について連続．

- 時相様相論理のsyntax

$$atom ::= a_1 \mid a_2 \mid \cdots \mid a_n$$
$$\phi ::= atom \mid not\phi \mid \phi_1 \wedge \phi_2 \mid \Box\phi \mid \Diamond\phi$$

構文の例：

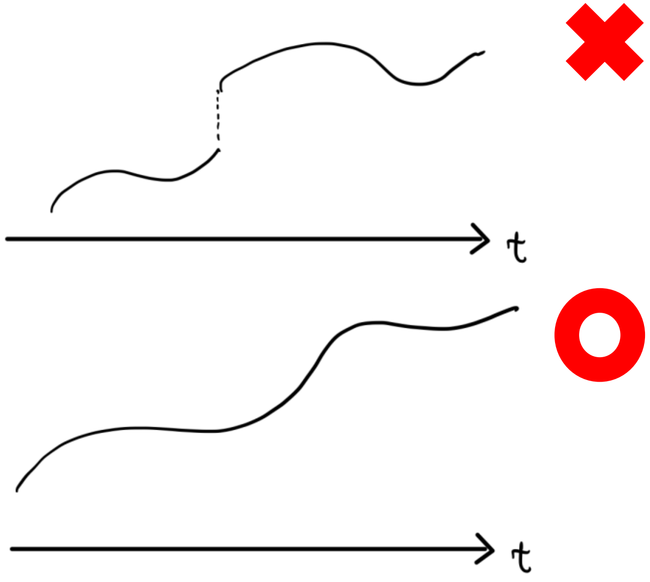
$$a_1, not\ a_1, a_1 \wedge a_2, \Box not(not\ a_1 \wedge not \Diamond a_2), etc \ldots$$

- 時相様相論理のsemantics

$a_1, \cdots, a_n$に対し，状態空間上の可測集合$B_1, \cdots, B_n$(確率を扱える集合)を対応させる．

時相様相論理のsemanticsを以下のように帰納的に定義．

$$X, t \vDash a_i \Leftrightarrow X(t) \in B_i \ \ (i = 1, \cdots, n)$$
$$X, t \vDash not\phi \Leftrightarrow not\ X, t \vDash \phi$$
$$X, t \vDash \phi_1 \wedge \phi_2 \Leftrightarrow X, t \vDash \phi_1\ and\ X, t \vDash \phi_2$$
$$X, t \vDash \Box\phi \Leftrightarrow For\ any\ t' \geq t, \quad X, t' \vDash \phi$$
$$X, t \vDash \Diamond\phi \Leftrightarrow There\ exists\ t' \geq t\ such\ that\ X, t' \vDash \phi$$



連続な時間全てに対して時相様相論理の意味を定義することができる

時相様相論理のsemanticsが作る意味（例）

$X, t \vDash a_1$：時刻tにおいて，$X(t)$は集合B_1の中にある．

$X, t \vDash a_1 \wedge a_2$：時刻$t$において，$X(t)$は集合$B_1$の中にあり，かつ集合$B_2$の中にもある．

$X, t \vDash \Box a_1$：t以降の全ての時刻t'において，$X(t')$は集合B_1の中にある．

etc…

主結果

上記のような時相様相論理を定義した結果生じる問題：

- Syntaxϕについて，「$X, t \models \phi$」が現す事象は可測か？⇨解決

(様相論理に確率論の枠組みを適用できることが判明した)

- $X(t)$がブラウン運動の時，$X, t \models \phi$を満たす確率はいくつか？

⇨解決

(どんなsyntaxϕについても，ϕを満たす確率が計算できるようになった)

[1]Baier, C. and Katoen, J.-P. (2008) Principles of model checking. MIT Press.
[2]Sucheendra K. Palaniappan *et al.* (2013) ‘Statistical Model Checking Based Calibration and Analysis of Bio-pathway Models’, *CMSB*, pp. 120–134. doi: 10.1007/978-3-642-40708-6_10.