有界平均振動空間に属するナヴィエ・ストークス方程式の解の滑らかさについて

発表者の自己紹介

発表者：青木 基記

Motofumi Aoki

所属：東北大学大学院

理学研究科数学専攻

博士2年

Mathematical Institute

Tohoku University D2

研究の動機

Q. 研究対象のナヴィエ・ストークス方程式とは?

➡ 粘性流体の運動を表す方程式.
気象や航空の数理モデルとして用いられている.

Q. どのような研究が行われている?

➡ 弱解(超関数解)と呼ばれる解が滑らかになるための
数学的条件を明らかにする研究が行われてきた.

研究の大まかな位置付け

Q. 本研究の目的は?

➡ 方程式の解が滑らかになる為の数学的条件の改良.

Q. 研究結果は?

➡ 有界平均振動空間と呼ばれる条件を満たす解が
滑らかになることを示した.

ナヴィエ・ストークス方程式とは?

非圧縮性ナヴィエ・ストークス方程式は,

粘性流体の運動を表した非線形偏微分方程式である:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^3, \\ \operatorname{div} u = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^3, \\ u\big|_{t=0} = u_0, & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \qquad \text{(N-S)}$$

u, p, u_0 はそれぞれ流体の速度場, 圧力, 初期速度場である:

$$\begin{cases} u = (u_1, u_2, u_3), \\ p = p(t,x), \end{cases}$$ 未知関数, $u_0 = (u_{0,1}, u_{0,2}, u_{0,3})$, 初期データ.

数学的解析を行う上での問題点は?

➡ 移流項 $(u \cdot \nabla)u$ の存在によって, 熱方程式のように解の表示ができない!!

どうやって数学的に解析を行うか?

➡ エネルギーが有限になることのみを仮定した**弱解(超関数解)**を用いて,

数学的に解析を行う!!

弱解(超関数解)とは?

弱解(超関数解)とは, 方程式を積分形で満たす解である.
すなわち, 方程式を以下の意味で満たす解を指す:

$$\int_0^t \{\langle -u, \partial_t \phi\rangle + \langle \nabla u, \nabla \phi\rangle + \langle (u\cdot\nabla)u, \phi\rangle\} d\tau = -\langle u(t), \phi(t)\rangle + \langle u_0, \phi(0)\rangle.$$

メリット

・微分可能性を考慮しなくて良いため, 解の存在が示しやすい.

・特に, 移流項の影響が大きくなる条件でも解の存在を示せる.

デメリット

・解の存在を示すための条件が広いため, 解が一意であるか分からない.

・また, 解の可微分性を仮定しないため, 解が滑らかであるか分からない.

必要な研究は?

➡ 弱解(超関数解)が滑らかになるための数学的条件の解明!!!

先行研究の比較

方程式の弱解が滑らかであることを示すには?

➡ 一定の条件を満たすように解に条件を加える!!

Serrin の結果

$$u \in L^2(0,T;L^\infty) = \left(\int_0^T \|u(t,x)\|_{L^\infty}^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\Rightarrow u \in C^\infty((0,T] \times \mathbb{R}^3).$$

$$\|u\|_{L^\infty} := \sup_{x\in\mathbb{R}^3} |u(x)|$$

Kozono-Taniuchi の結果

$$u \in L^2(0,T;BMO) = \left(\int_0^T \|u\|_{BMO}^2 \, d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\Rightarrow u \in C^\infty((0,T] \times \mathbb{R}^3).$$

$$\|u\|_{BMO} := \sup_{x\in\mathbb{R}^3, r>0} \left(\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x)} |u(y) - u_{B_r(x)}|dy\right).$$

➡ 条件を加えることで, 解が滑らかになることがわかる!!

※ $L^\infty \subsetneq BMO$ であることが知られている. 特に, $\log|x| \in BMO$ から,
対数増大するような解も扱うことが出来るようになる.

本研究の目的は?

➡ Kozono-Taniuchiの結果について, **時間の仮定を改良**したい!!

主結果と先行研究の比較

主結果

Thm. (A-Iwabuchi, DIE, 2021).
$0 < T < \infty, u_0 \in L^2_\sigma$ とする. u は (N-S) の時刻 $(0,T)$ 上の弱解で, 次の条件

$$\sup_{0<t<T} t^{\frac{1}{2}} \|u\|_{BMO} < \infty.$$

を満たすものとする. この時, 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\sup_{0<t<T} t^{\frac{k}{2}} \|\nabla^k u\|_2 < \infty$$

が成り立つ.

先行研究との比較

$||u||_{BMO} \simeq t^{-\frac{1}{2}}$ となるような解を考える.

主結果の条件を満たしているが, Kozono-Taniuchi の条件を満たしてない.

➡ 初期時刻近傍で仮定が改良された主張になっている.