吉田朋広

確率過程に対する極限定理および統計推測理論の研究

ランダムな量Xの確率的な構造はXの確率分布で表現することができますが、現実のデータの場合、その構造が完全に規定されることはほとんどありません。Xの値域となる標本空間を$\mathcal{X}$とするとき、十分豊富と見なせる$\mathcal{X}$上の確率測度の族 $\mathcal{P}=\{P_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ を想定し、可能性のある未知の構造をパラメータθで区別します。モデリングとは$\mathcal{P}$の構築であり、モデルのデータへの当てはめ（モデルの推定）とは写像$\hat{\theta}:\mathcal{X}\to\Theta$を決めることと言えます。

統計解析の方法は、観測 $x\in\mathcal{X}$ に対して何らかの決定 $\delta(x)\in\mathcal{D}$ をすることです。ここで$\mathcal{D}$は決定空間と呼ばれます。推定、検定、予測といった個々の問題に応じて空間$\mathcal{D}$は適宜設定されます。決定関数δの統計手法としての良さは、偶然得られた観測xによって評価するのではなく、その観測値が得られる頻度を考慮して総体的に測られるべきで、リスク関数$R(\theta,\delta)=\int W(\theta,\delta(x))P_\theta(dx)$で評価されます。$P_\theta$にまつわる計算が必要になることは言うまでもありませんが、最適な決定関数は$\mathcal{P}$全体の構造で決まり、決定関数の選択の仕方として$\mathcal{P}$に基づく方法（尤度解析）が重要になります。

統計科学は、データの持つ情報を抽出、加工し、現象の理解や予測を行うための方法論です。統計手法δの妥当性は、データが従う確率的な構造P_θおよびその総体$\mathcal{P}$の構造に強く依存するため、統計理論の正しい発展のためには、確率論と数理統計学の両方の研究が必要となります。両分野の融合は、近年発達している確率過程の統計学において顕著で、確率統計学と呼ばれる新しい分野が形成されつつあります。確率過程の統計学の対象は諸科学に現れる多様な一般に非線形の時系列データです。そこではP_θの陽表現も仮定できないため、その近似と誤差評価、さらに、非線形性による困難を解消するための漸近的方法の創出とその評価のために種々の極限定理が必要になり、理論統計学と確率論が協働する数学の場が現れます。例として確率微分方程式の統計解析では、P_θは偏微分方程式の解で表され、あるいはパス依存型の場合はより複雑にもなり、擬似尤度の構成が必要となります。擬似尤度解析に基づく決定関数の挙動を調べるためには確率過程の漸近挙動と汎関数の極限分布を捉えることが重要になります。

確率過程に対する従来の漸近理論を越えるために、混合ガウス型極限定理、セミマルチンゲールの汎関数に対する確率分布の安定的収束、高次の極限定理である漸近展開、確率空間の部分多様体上の極限定理および漸近展開など、新たな研究課題が統計推測の問題から必然的に現れます。その探求には漸近分布論を前提とし、セミマルチンゲールに対する確率解析学、パス空間やconfiguration space上のマリアバン解析が有用になります。確率統計学はこのように統計学の問題を解決するための数学的な枠組みを与えるもので、それを通して多くの実用的な公式が得られます。

統計学は、確率分布の近似に関して多くのスキルを有しています。統計学から出てきた漸近展開法がオプション価格の計算に役立ちました。いっぽう、近年の動向として、金融工学への応用から具体的な課題が示されています。確率微分方程式の推定は理論統計学に長い歴史がありますが、非同期的観測に基づく推測は実際の高頻度データに触発されて起きた課題です。数理統計学においては最後には厳密な数学による推測法の評価が課されますので、そのことがむしろ、統計量の探索において過去の例にとらわれない発想の自由を与えます。非同期データに対して現場で試みられた様々な方法がうまくゆかない状況で、非同期共分散推定量（HY 推定量）を直観に基づき提案し、そのパフォーマンスを理論的に明らかにしました。この推定法はいま応用の現場に還元されています。

$$\left| E\left[f(X_n)\right] - \int f(z)p_n(z)dz \right| \lesssim r_n^{-q'} P[\sigma_{M_n} < s_n]^{1/p} + o(r_n)$$

$$\begin{aligned} p_n(z) &= \phi(z) + \frac{1}{2} r_n \partial_z^2 (E[\xi|Z=z]\phi(z)) \\ &\quad - r_n \partial_z (E[\eta|Z=z]\phi(z)) \end{aligned}$$

マルチンゲールの漸近展開