森田茂之

曲面に関連するシンプレクティック群の表現と幾何学的不変量

２次元の広がりを持つ図形である曲面は、幾何学において基本的な役割を果たし続けている。まずガウスは、曲面の曲がり具合を表す量としてガウス曲率を定義し、それが全体の空間によらない曲面に固有な量であることを示した。この結果はガウス自身も驚いたと伝えられ、驚異の定理（Theorema Egregium）と呼ばれている。また、ガウス、ボヤイ、ロバチェフスキーは、それぞれ独立に非ユークリッド幾何学を発見した。さらにリーマンはリーマン面の概念を導入した。これらはいずれも曲面が舞台であった。

曲面は理想郷

上記ガウスの仕事は、リーマンによるリーマン計量の導入を経て成立した、微分幾何学と呼ばれる分野の源流と見なされている。またリーマン面の理論は、一般次元の複素多様体の理論へと大きく一般化された。さらにポアンカレは位相幾何学と呼ばれる新しい幾何学を創始した。このように、現代幾何学はいくつかの分野に分かれて発展してきた。しかし曲面においては、それらは本質的には同等の理論と見なすことができる。曲面は言わば数学世界における理想郷ということができよう。

曲面上の二つの構造：

$\left\{\begin{array}{l}\text{定曲率計量}\\\text{リーマン面}\end{array}\right.$　のモジュライ空間

曲面上には種々の幾何学的な構造が存在する。代表的なものは、ガウス曲率が一定の定曲率計量およびリーマン面の構造であるが、曲面が理想郷である一つの証左として、それらは等価であることが知られている。これらの構造は多様に存在するが、それらの同型類全部を集めた空間をモジュライ空間という。この空間は代数幾何学、複素解析学、微分幾何学、位相幾何学、さらには数理物理学を含む多くの分野で重要な役割を果たしている。本研究では、位相幾何学の立場からの研究を推進してきた。

曲面とシンプレクティック群の表現

一つのリーマン面が与えられると、そのヤコビ多様体と呼ばれる多様体が定まる。そして正則１形式達をリーマン面上に選んだ基点から積分することにより、ヤコビ多様体へのアーベル・ヤコビの写像が構成される。ヤコビ多様体上には自然なシンプレクティック形式が定義されるが、これをアーベル・ヤコビの写像で引き戻してリーマン面上で積分すれば、リーマン面の基本的不変量としての種数が現れる。少し別の角度から言い換えると、向き付けられた閉曲面の１次元ホモロジー群は、交叉数形式によりシンプレクティック群の基本表現空間となる。そして、この表現空間を幾何学的に実現したものが、シンプレクティック多様体としてのヤコビ多様体ということになる。

このよく知られた事実を、さまざまな形で一般化することにより、曲面に関連する種々のモジュライ空間および３,４次元多様体に関する特性類や不変量が得られる。

曲面の写像類群　⇒　三つの拡大

$\left\{\begin{array}{l}\text{算術的写像類群}\\\text{自由群の自己同型群}\\\text{ホモロジー的曲面束の成す群}\end{array}\right.$

リーマン面のモジュライ空間のオービフォールド基本群として、曲面の写像類群と呼ばれる群が登場する。この群を部分群として含む重要な群として、算術的写像類群、自由群の自己同型群、そしてホモロジーの意味での円周上の曲面束のホモロジー同境類のなす群等がある。これらの群の構造の研究においても、シンプレクティック群のさまざまな表現が現れる。例えば、基本表現の生成する多項式代数、テンソル代数および自由リー代数等である。これらの表現空間上のシンプレクティック不変なコホモロジー類を考えることにより、リーマン面やグラフのモジュライ空間、絶対ガロア群、ホモロジー３球面、さらには位相的およびC^∞級の４次元多様体等に関する、さまざまな特性類や不変量を構成することができる。現在共同研究者の協力を得つつ、これらの非自明性や期待される諸性質について研究を続けている。