舟木直久

大規模相互作用系の確率解析

流体の運動など、物理現象における時間発展の法則は、一般に非線形偏微分方程式によって記述される。そのような物理現象の背後には、原子・分子等によって構成されるミクロ（微視的）な世界がある。それは巨大な自由度を持つ集合体であり、互いにきわめて複雑な相互作用をしながら時間的に変化する系である。これを大規模相互作用系という。マクロ（巨視的）な観測量に対する諸法則をミクロなレベルの運動法則から説明することは、統計物理とよばれる分野の目標であり、それに数学的な基礎付けを与えることは、確率論の重要なテーマの一つである。

筆者は、確率解析に基づく大規模相互作用系の研究、特にミクロとマクロを繋ぐスケール極限、最近は主として相分離と界面の形成に関わる問題に焦点を絞って考察を行っている。確率解析は伊藤清（平成20年度文化勲章受章者）により創始され、その発展には日本人研究者たちの貢献も大きい。また、大規模相互作用系に対するスケール極限は流体力学極限とよばれ、その解析にはS. R. S. Varadhan（ニューヨーク大学）のエントロピー法が基本的手法として用いられる。物理的な系を十分低温で観測すれば、通常2つ以上の相（例えば水と氷）が共存する状態が生ずる。初期時刻で異なる相が共存していれば、それらを分離する境界面（界面という）が現れ、それは時間とともに変化していく。その時間発展の法則をミクロな系に対するスケール極限、特に流体力学極限の観点から考察することが研究目標の一つである。

流体力学極限とその基本原理である局所エルゴード性について簡単に説明しておきたい。原子の大きさ（約10^{-10}m）とマクロなレベルの長さ（1cm）の比は、$\varepsilon = 10^{-8}$程度であるから、ミクロな系に対して、空間スケールをε倍に縮小する変換を施すことによって、マクロな世界の描像に移ることが可能になる（逆に、マクロからミクロな世界を覗くにはε^{-1}倍の顕微鏡が必要である）。ちなみに、体積比ε^{-3}はアボガドロ数6×10^{23}に匹敵する大きさである。ミクロからマクロな世界に移るには、空間のスケール変換と同時に時間のスケール変換も必要である。このような時空のスケール変換において$\varepsilon \downarrow 0$とする極限操作を行い、特に局所的なエルゴード性に基づく平均化を経由して、大規模相互作用系から非線形偏微分方程式等を導く過程を標語的に流体力学極限という。一般にミクロな系を考えるとき、マクロに短い時間であっても、それはミクロなスケールにおいては非常に長い時間である。したがってミクロな系はある種の平衡状態に到達すると予想される。しかし、ミクロな系の平衡状態は通常、一意ではない。その結果、マクロな時空の点ごとにその周辺のミクロな系を観察すれば、異なる平衡状態が現れると考えられる。これが局所平衡状態とよばれるものである。長時間にわたることに起因する平均化を局所エルゴード性という。流体力学極限の背後には、各点ごとに配置された平衡状態が連続的に連なり、それらが互いに影響を及ぼしながらそれぞれ平均化を起こしていくという描像がある。

このような描像を数学的に実現するために、種々の確率モデルを採用し研究を行っている。離散空間上のランダムウォーク粒子集団（格子気体）や連続スピン系などである。このようなモデルに対し局所エルゴード性を示すことにより、実際に様々な非線形偏微分方程式を導くことが可能になる。たとえば、反応拡散方程式、非線形な拡散係数を持つ放物型偏微分方程式、ステファン自由境界問題、非粘性バーガース方程式、ハミルトン-ヤコビ型方程式、平均曲率運動方程式、発展的変分不等式、流体のオイラー・ナビエ-ストークス型の方程式などである。

グローバルCOE「数学新展開の研究教育拠点」事業推進担当者として、他分野とも関わりを持つ研究を進め、数学の可能性を少しでも広げられるよう努力したいと考えている。

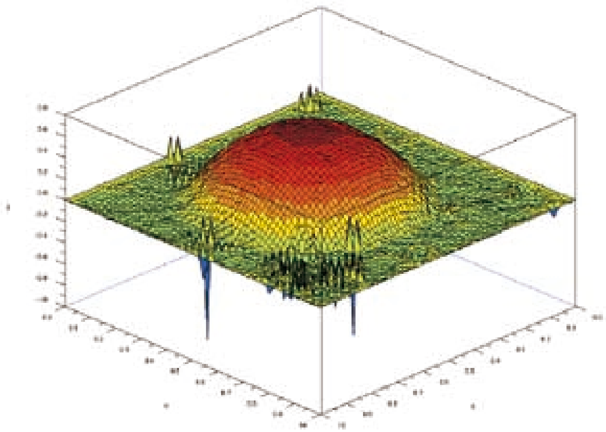

Figure 1: ウルフ図形
図1は安定な界面の形、例えば水平面の上に置かれた水滴の形、を示したものである。ミクロなレベルの界面の時間発展は、揺動の効果を加えたランジュバン方程式によって記述される。これは一種の確率微分方程式である。その解の時間t →∞の極限として図1のウルフ図形が求まる。確率微分方程式に対するオイラー-丸山法により数値計算を実行し得られた図形である。