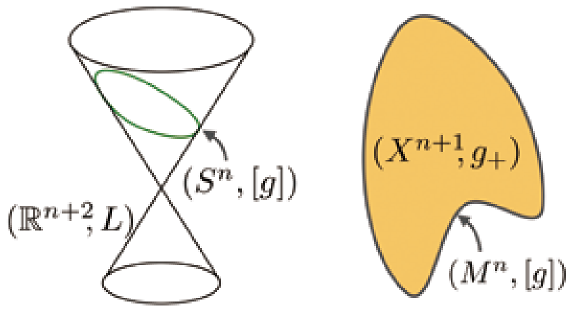
平地健吾

共形幾何およびCR幾何にあらわれるアンビエント空間

空間の対称性を調べるには、対象となる空間をより高い次元の空間のなかに入れる、あるいは低い次元の空間に帰着させるという手法が役に立ちます。

たとえばn次元球面の角度を保つ変換（共形変換）を求めるには、球面上の長さのスケーリングの自由度を錐とみなし、さらに錐をn+2次元ベクトル空間の中のローレンツ二次計量Lの零点集合として埋め込みます。このとき球面の共形変換はLを保つ線形変換として与えられます。

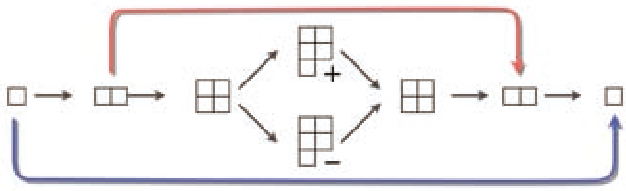


また理論物理においてはn+1次元の完備アインシュタイン多様体（X^{n+1}, g_+）と、その無限遠境界として現れるn次元共形多様体（M^n, [g]）との対応がAdS/CFT対応として盛んに研究されています。これは古くから知られていた複素領域の幾何と境界の幾何（最近はCR幾何とよばれる）の類似と見ることもできます。

これらの対応を統一的にあつかうための理論がフェファーマン・グレアムのアンビエント空間です。上の円錐の図を曲がった共形多様体（角度だけをあたえた空間）（M^n, g）について考えると、Mを含む錐は簡単に作れますが、錐を含む空間（アンビエント空間）の構成には工夫が必要です。一つの方法はローレンツ二次形式のかわりにリッチ曲率が消えるローレンツ計量Lを作るというものです。次元nが奇数のときにはこの条件でただ一つの計量がきまり、共形多様体（M^n, [g]）とアンビエント空間（M, L）の対応がえられます。これはフェファーマン・グレアムにより２０年前に証明され共形幾何の基本的な道具となっています。

ところが次元nが偶数だとアンビエント空間を決める方程式の解の構成に障害があらわれます。この困難は弱い特異性をもったローレンツ計量Lを考えれば回避できます。障害が現れるのは残念なことではなく、新しい不変量を構成する道具になるというのが理論のポイントです（グレアム氏との共同研究）。

共形多様体の曲りの大きさは変形複体とよばれる微分作用素の系列を用いて表すことができます。そこに現れるテンソルの対称性をヤング図形で表すと、例えば６次元での変形複体は次のようになります。



黒い矢印が古典的に知られていた作用素で次元の偶奇にかかわらず常に現れます。アンビエント空間の理論を用いれば、これら以外にも赤と青の二つの矢印に対応する作用素が一つずつ存在することが分かります。赤い矢が上述の障害を与えるテンソルです。青い矢は2n階の偏微分作用素でいくつかの興味深い性質をもちます。最も重要なのはこの作用素からQ-曲率とよばれるリーマン不変量が定義されるということです。Q-曲率は偶数次元空間だけに現れる対象で、最初にのべたAdS/CFT対応での繰り込み体積の表示にも現れます。アンビエント空間を作ること初めて計量の高次の微分を含む共形幾何の定式化が可能となり、新しい幾何的偏微分方程式論の始まりとなっています。