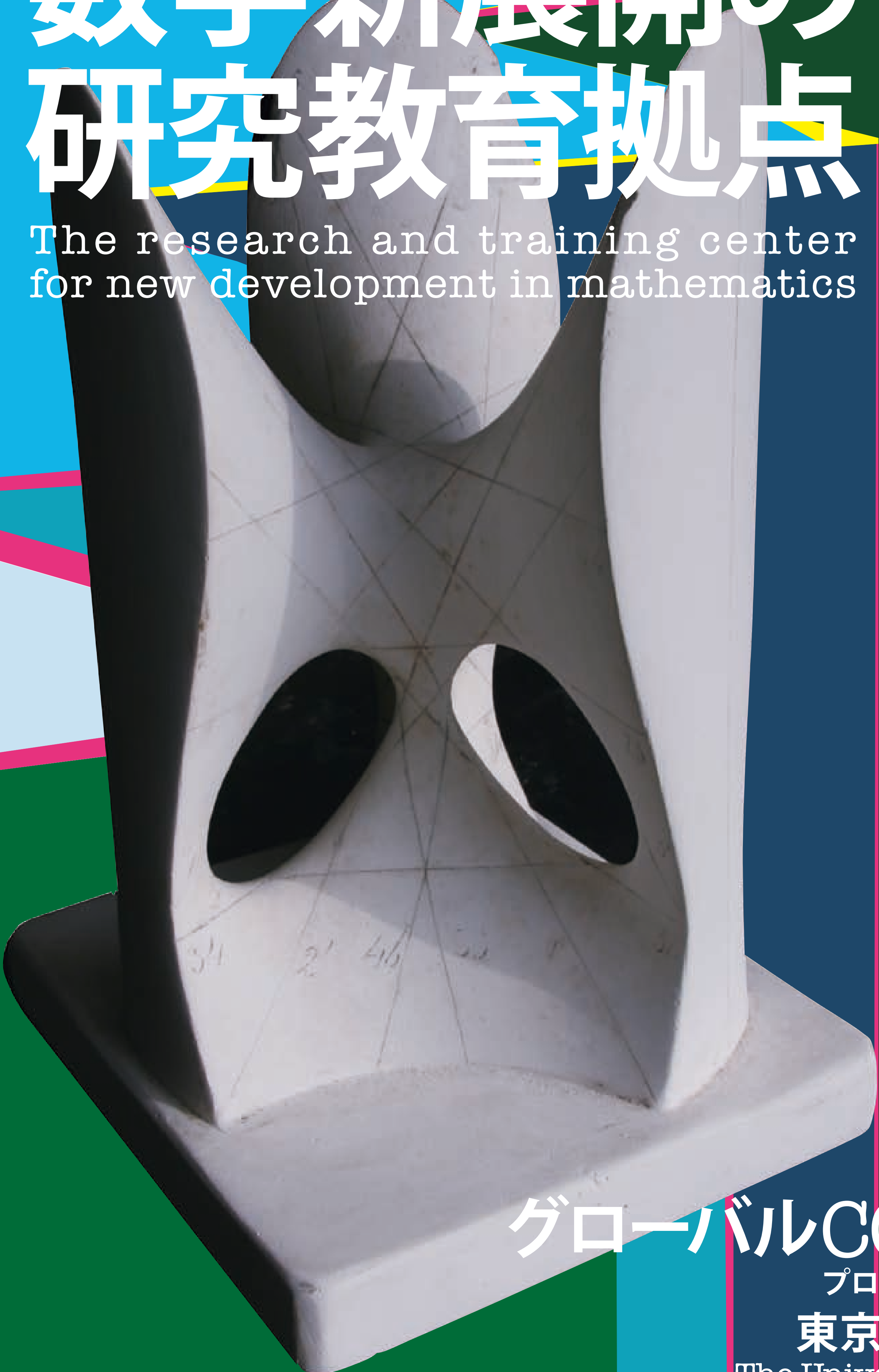
# 数学新展開の研究教育拠点

The research and training center for new development in mathematics



グローバルCOE
プログラム

東京大学
The University of Tokyo

# リーダー挨拶

川又雄二郎

グローバルＣＯＥ事業「数学新展開の研究教育拠点」がスタートしました。この事業は、数学新展開という言葉をキーワードに２１世紀ＣＯＥ事業「科学技術への数学新展開拠点」の後継として、２倍以上に規模を拡大した形で今年から５年間の予定で実施されます。 ２１世紀ＣＯＥの経験を生かして、そこで得られた数々の成果をさらに大きなものへと発展させていきたいと思います。

目標は、数学の先端研究における国際級センターの地位を確立し、広い意味での数理科学の人材供給基地になることです。大学院の充実と研究の国際化を通して、先端研究現場で人材を育成するというのがコンセプトです。「数学イノベーション」とも呼ばれる数学の応用範囲の広がりとともに、コア数学のなかへの新展開も目指します。

「数学はひとつ」といわれます。本学数学教室の卒業生である小平邦彦先生（フィールズ賞受賞者）は代数・幾何・解析の各分野を広くカバーした深い研究業績を上げられました。われわれは小平先生という素晴らしい手本を持っているのです。また、伊藤清先生（ガウス賞受賞者）も同時期の卒業生であるということは、純粋数学（またはコア数学）と応用数学（または産業数学）は一体のものであるということを示しています。純粋数学で業績をあげた人が応用数学に守備範囲を広げることができるのも、数学はひとつだからです。

多数の外国人ビジターが集う世界に開かれた研究科を目指します。スローガンは「東大に行けば誰かに会える」です。国内外から優秀な人材を特任教員として招聘するほか、多くの短期ビジターを国際研究集会や共同研究に招きます。国際的人材が行きかい、高いレベルで刺激しあうという拠点を目指します。特に優秀な若手研究者には、小平先生にちなんだ「小平フェロー」の称号を与え奨励します。

博士課程大学院生の大部分をＲＡに採用し、経済的に自立して研究に専念できるようにします。ＲＡにはＴＡとして短時間の教育活動を義務付け、将来教育職に就いた場合のキャリアにも配慮します。若手の特任教員には、研究に支障のない範囲でさらに重要な教育活動を担ってもらいます。

ＧＣＯＥの選考の過程では、数学分野以外の多くの指導的な方々に出会うことができました。世の中には「数学をやって何の役に立つのか」と問う人もありますが、数学に親しみを感じる心ある人たちも多いことを発見し、数学の重要性を再認識させられました。このプログラムは、多額の国費を頂いて、数学の次世代を担う国際級の人材の育成を目指すものです。その期待にこたえるためには、さまざまな面でとびぬけたレベルの成果が要求されています。若手の研究者たちには、良い意味でのノーブレス・オブリージュを自覚し、数学の研鑽に励むと共に、人間的にも素晴らしい人に育ってほしいと願っています。

# 目　次

# 拠点概要

## 拠点形成の目的

数学は「科学の言葉」であるといわれる。数学の研究には専門的なものが多く、マスコミに取り上げられるような成果が少ないため、その意義を一般社会にわかりやすく説明することは難しいが、数学は科学技術立国のインフラとして不可欠なものであり、「数学イノベーション」の時代に入ったともいわれる近年になり、その重要性はさらに増している。当専攻は一級の教授陣と優秀な学生とに恵まれているが、これに安住することなく、わが国の数学系の人材供給基地としての責任を自覚し、常に高いレベルでの研究を行い一級の人材を育てることを目標とする。自由ではあるが緊張感をもった競争的研究環境の中で、純粋数学および応用数学の国際級の研究を推進すると同時に、数学研究の次世代リーダーとさらに広い意味での数学イノベーションの担い手を育成するとともに、数理的思考力を生かして広く社会に役立つ研究能力を有する人材の供給を目指す。代数学、幾何学、解析学、応用数学の４研究部門と、ファイナンス、情報数学、数論幾何学、複素幾何学、無限次元表現、数理物理学、統計解析計算、非線形現象、視覚などの研究班の活動を通して、研究者間の相互作用を高め、研究を活性化させる。大学院博士課程の学生に対しては、数学の研究を基にした抽象的思考のトレーニングを行い、しっかりした数学知識の基盤を確立させるとともに、国際的な研究環境におくことによって国際舞台で実力を発揮できる人材に育てる。数多くの多様な外国人研究者たちとの交流を通じて、狭い専門分野に閉じこもることなく、広く社会の多分野で活躍できる人材の育成を目指す。数学の研究の遂行によって培われた抽象的思考の習慣は、数学研究はむろんのこと、企業人となり全く異なった分野に進んだとしても、長期にわたり役立つことが期待できる。

## 拠点形成計画の概要

国内外から広く人材を招聘し、活発な研究活動を維持するとともに、教育への波及効果を狙う。その際、世代分布や研究分野の多様性の確保に留意する。

1．国際的に著名な研究者を特任教授として、またそれに准ずる人材を特任准教授として雇用する。
2．優秀な国内外の若手研究者を小平フェローとして雇用する。
3．欧米などの大学院に在学中の特に優秀な研究者の卵に対しても、小平フェローに準じる待遇で渡航費用および１年間を超えない期間の滞在費を支給する。

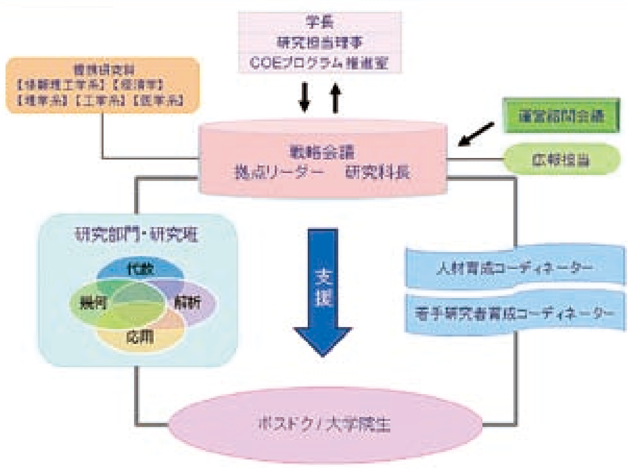
このようにして、多くの外国人訪問者が滞在し、国際的雰囲気にあふれる高いレベルの研究環境は、博士課程の大学院生にとっても刺激的であり、国際的研究者の育成につながる。特に、世代の近い外国人訪問者から得られる刺激は大きいと期待できる。ＰＤを中心とする若手研究者に対して

は、教育者としてのキャリア形成のために、若手研究者教育コーディネーターが指導を行い、学生向けセミナー開講の手助けをする。大学院博士課程の学生に対して以下の支援を行う。

1．大部分の学生をＲＡまたはＴＡに採用し、研究・教育に参加する報酬として月額２0万円程度を限度に支援を行う。
2．研究の進行状況と必要に応じて短期間海外に派遣する。海外で研究発表しアドバイスを受けたり、サマースクールに参加するなどの活動を行う。
3．若手人材のキャリア形成を支援するための人材育成コーディネーターをおく。

代数学・幾何学・解析学・応用数学の４大研究部門を縦軸に、純粋数学および応用数学の各種の研究班を横軸にすえた研究体制により、一級の研究者たちの有機的なつながりを促進する。大規模国際研究集会を定期的に開催するほか、小規模研究集会や連続講演を多数開催することによって、常に緊張感を持って研究・教育活動を行う。将来的に研究が発展すると期待されるトピックを選定して、外国人を含む専門家を講師として招聘し、３週間程度のサマースクールを実施する。また、学生に発表の機会を与えるために、研究集会での講演発表やポスターセッションを行う。研究の成果はホームページやビデオアーカイブスを通じて広く公開し、インターネットを通して見られるようにする。

経済学研究科と連携してファイナンス研究班を立ち上げる。外部の実務家を交えた共同研究により、実効性のある金融理論の研究を行い、実務家を養成する。また、情報理工学研究科と連携して情報数学研究班を立ち上げる。最適化の構造と計算に関するわが国独自の技術を開発するとともに、数学と情報科学の両方に明るい人材を育成する。また、暗号・符号理論をはじめとするインターネット数学の基礎理論を研究し、世界に通用する人材を育てる。



# 人材育成コーディネーター挨拶

人材育成コーディネーター　野口 潤次郎

今般のグローバルＣＯＥ（ＧＣＯＥ）の大きな柱として、高度な知識・研究経験を修め博士の学位を持つ人材を社会の各層に供給するという目的が掲げられています。戦後の初めての教育改革と呼ばれた大学院改革の最終目的が、ある意味でここで再度掲げられているとも見られます。本研究科として今回採択されたＧＣＯＥプログラム「数学新展開の研究教育拠点」では、この目的のためにサブリーダーが人材育成コーディネーターとしてその任に当たります。

初年度は、先ずは体制作りから始めることとし、五人の委員からなる「ＧＣＯＥ人材育成委員会」を設けました。来年度に向け新しい授業科目として「社会数理特別講義」を設置すべく準備中です。内容は、官公庁、民間の会社など社会の色々な局面で数学又は数理科学を使って仕事をしている方々によるオムニバス講義です。実際に活躍中の方々の話を、博士課程を中心として院生が聴講することによりより広い識見を身につけるようにすることが目的です。今年度は、未だ授業の制度ができていませんので「社会数理講演シリーズ」として実施中です。基本的に１ユニットは２つの講演（講義と同じく９０分）からなり、半年で７ユニット１４の講演が行われます。来年度には、正式の授業として２単位の単位が受講生には与えられる計画です。

また、ＧＣＯＥ研究支援員として採用された博士後期課程の院生は、積極的に本プログラムの活動に参画し、授業補助を通して教育の実経験を積み、各種セミナーを自主的に開催するなどの活動をとおして本プログラムの一翼を担います。

本研究科では、毎年２０名以上の博士取得者を世の中へ出していますが、これら高度な知識と研究能力を持つ人材が、大学などの高等教育研究機関だけでなく、より広い社会の中でその適性を生かして活躍する社会を目指し、努力する所存であり、これが他でもなく今般の大きな予算処置をいただいたＧＣＯＥプログラムからの負託に応えることと考えています。

# 若手研究者教育コーディネーター挨拶

若手研究者教育コーディネーター　河東 泰之

私の役目は若手研究者育成コーディネーターというものです。
その内容は、特任助教、特任研究員などの方々が、大学などのアカデミックな世界の研究職につき、研究者として生きていくことの手助けです。

大学院重点化による大学院生の激増にもかかわらず、少子化、大学予算カットなどによる大学教員ポストの減少、大学間競争の激化により、大学での研究職をめざす道は近年大幅に厳しくなりました。昔と違い、今ではいくつもの任期つきポストを渡り歩きながら終身雇用のポストを目指すのがほぼ必然のコースとなり、その任期つき研究員のポストを得ることも容易ではありません。このような状況で、大学のポストを得るには、多くの努力が必要です。

よい研究成果をあげることが最も重要であることは言うまでもありませんが、それに加えて英語で論文を書き、学会で発表し、自分の研究成果や計画をアピールしていくことはそれほど簡単なことではありません。若手の皆さんが、これらのことについて有益な経験を積み、将来の研究キャリアにつないでいけるようにアドバイスをしていきたいと思います。

また、教育、特に数学を専門とはしない理工系学生に数学を教えることも大学の研究者の主要な仕事であり、その重要性はますます高まっています。高校までの教員になるには教育実習があるのに、大学の教員には何の教育訓練もなくなれてしまうというのはおかしなことです。このような教育面の研修も目指しています。

これらについてのコツは、これまでは先生や先輩からなんとなく教わる、あるいは自ら身につけることが中心で、あまり組織的に教えてはいなかったように思います。私はアメリカで大学院を出ましたが、これらのことについてももっといろいろな指導があり、それはその後の研究キャリアにたいへん有益であったと思います。その経験を生かしてこの役目を果たしていきたいと思います。

# 事業推進担当者一覧表

| 氏名（フリガナ） | 所属部局 | 職名 | 現在の専門・学位 |
|---|---|---|---|
| 新井 仁之（アライ ヒトシ） | 大学院数理科学研究科（数理科学専攻） | 教授 | 実解析・理博 |
| 小澤 登高（オザワ ナルタカ） | 大学院数理科学研究科（数理科学専攻） | 准教授 | 作用素環・理博，PhD |
| 桂 利行（カツラ トシユキ） | 大学院数理科学研究科（数理科学専攻） | 教授 | 代数幾何・理博 |
| 河東 泰之（カワヒガシ ヤスユキ） | 大学院数理科学研究科（数理科学専攻） | 教授 | 作用素環・理博，PhD |
| 川又 雄二郎（カワマタ ユウジロウ） | 大学院数理科学研究科（数理科学専攻） | 教授 | 代数幾何・理博 |
| 楠岡 成雄（クスオカ シゲオ） | 大学院数理科学研究科（数理科学専攻） | 教授 | 確率論・理博 |
| 小林 俊行（コバヤシ トシユキ） | 大学院数理科学研究科（数理科学専攻） | 教授 | 表現論・理博 |
| 斎藤 毅（サイトウ タケシ） | 大学院数理科学研究科（数理科学専攻） | 教授 | 数論幾何・理博 |
| 高橋 明彦（タカハシ アキヒコ） | 大学院経済学研究科（金融システム専攻） | 教授 | ファイナンス・PhD |
| 坪井 俊（ツボイ タカシ） | 大学院数理科学研究科（数理科学専攻） | 教授 | 位相幾何・理博 |
| 寺杣 友秀（テラソマ トモヒデ） | 大学院数理科学研究科（数理科学専攻） | 教授 | 代数幾何・理博 |
| 時弘 哲治（トキヒロ テツジ） | 大学院数理科学研究科（数理科学専攻） | 教授 | 数理物理・工博 |
| 野口 潤次郎（ノグチ ジュンジロウ） | 大学院数理科学研究科（数理科学専攻） | 教授 | 複素解析・理博 |
| 平地 健吾（ヒラチ ケンゴ） | 大学院数理科学研究科（数理科学専攻） | 准教授 | 複素解析・理博 |
| 舟木 直久（フナキ タダヒサ） | 大学院数理科学研究科（数理科学専攻） | 教授 | 確率論・理博 |
| 古田 幹雄（フルタ ミキオ） | 大学院数理科学研究科（数理科学専攻） | 教授 | 幾何学・理博 |
| 俣野 博（マタノ ヒロシ） | 大学院数理科学研究科（数理科学専攻） | 教授 | 非線形解析・理博 |
| 室田 一雄（ムロタ カズオ） | 大学院情報理工学系研究科（数理情報学専攻） | 教授 | 数理工学・工博，理博 |
| 森田 茂之（モリタ シゲユキ） | 大学院数理科学研究科（数理科学専攻） | 教授 | 位相幾何・理博 |
| 山本 昌宏（ヤマモト マサヒロ） | 大学院数理科学研究科（数理科学専攻） | 准教授 | 逆問題・理博 |
| 吉田 朋広（ヨシダ ナカヒロ） | 大学院数理科学研究科（数理科学専攻） | 教授 | 確率統計・工博 |

事業推進担当者　計21名

# 新井仁之

## 数理視覚科学の確立とその応用

### ■視覚、錯視そして数学

視覚の研究は実験的な諸技術の発展により近年大きく進展している。たとえば、視覚のどのような情報処理が脳のどの領野で行われているかが詳しく調べられてきた。しかし視覚情報の処理がどのような計算により行われているかについては、未だわかっていないことが多い。私はこの部分の解明に数学的な方法が有効であると考え、視覚の情報処理の数理モデルを研究している。その際、鍵となるものが錯視である。錯視とは視覚が起こす錯覚である。錯視の一例として色つきマッハリングをあげておこう。黄色い円板と青い円板の円周のところに緑が見えてくるが、この緑は実際には存在しない。

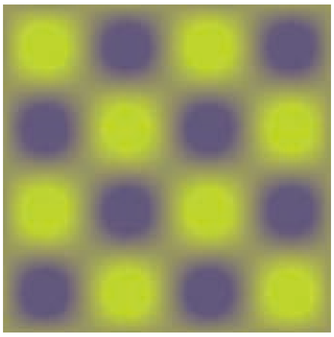


図1　Colored Mach Ring (Arai, 2007).

### ■なぜ錯視が重要か

このように視覚は錯視を引き起こす。したがって、もしも視覚の数理モデルが適切なものならば、それを実装したコンピュータも錯視を引き起こすはずである。いわば錯視は視覚の数理モデルにとって試金石の役割を果たす。一方、コンピュータが錯視を生み出すような計算アルゴリズムを見出すことにより、逆に未知の視覚のメカニズムを推測することもできるのである。

### ■数学的方法による錯視の研究

本研究は錯視そのものの解明にも大きく貢献するものである。私たちはこれまでに大脳皮質のV1 野で起こると考えられるさまざまな錯視の統一的な計算機シミュレーションに成功した。また色に関する錯視のシミュレーションや幾何的な錯視の数学的分析も行っている。こういった研究はこれまでにない新しいものである。

### ■数学、コンピュータビジョンとの関連

視覚の数理モデルの数学的部品として、私は新しいフレームレットを開発している。フレームレットとはウェーブレットをより進化させたようなもので、2003 年頃より数学的な研究が行われてきた。これまでに私たちはpinwheel framelet を考案したが、これを用いて高次視覚に関連するであろう全く新しいタイプのウェーブレット・フレームの研究も進めている。

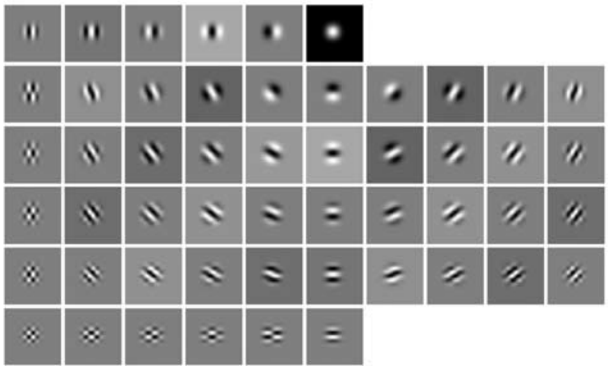
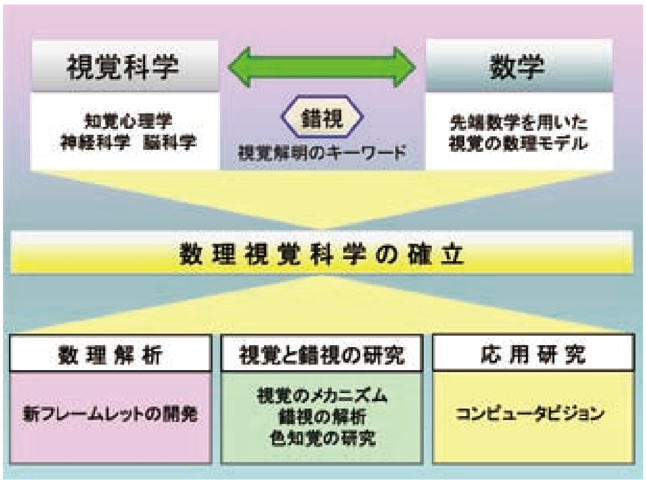
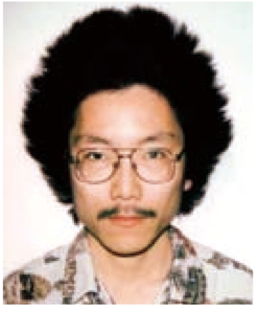


図2　Simple pinwheel framelet (Arai-Arai, 2008).

これらの研究は、視覚・錯視の解明をはじめ、コンピュータビジョンへの応用の可能性もあると考えている。また色知覚の数学的方法による研究は、色に関する様々な分野とも深く関連している。





# 小澤登高

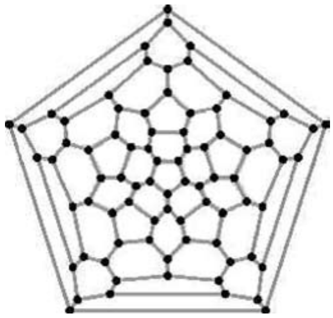
## 作用素環と離散群の研究

私は作用素環と離散群の関わりを研究している。（離散）群とは、任意の対象の対称性を記述するための数学言語である。例えば、ある結晶が与えられたとき、その結晶構造を変えない変換（回転操作、鏡映操作、反転操作など）全体を考えたものが群である。人間には線形的な構造の方が理解しやすいので、群の各要素を適当な（線形）空間上の作用素とみなして取り扱うことにする。さらに、そうした作用素全体が生成する代数系を考え、適当な位相で完備化すれば作用素環と呼ばれる対象ができる。位相の存在により、群論のような代数的な問題に対しても解析的なテクニックを使えるところが作用素環論の特徴である。作用素環の研究はそもそもは、John von Neumann が量子力学の数学的取り扱いを目指して始めたものであったが、現在では数理物理だけでなく、幾何学、群論、エルゴード理論などに幅広い応用がある。私の研究は双方向的で、幾何学、群論、エルゴード理論の作用素環論への応用と、その逆を同時に扱っている。

von Neumann

私の最近の研究テーマは、群の解析的な意味での有限近似、及び、離散群とその確率空間への作用から構成される作用素環（$\mathrm{II}_1$ 因子環）の分類問題、の二つである。理想的な有限近似が可能な群を従順群と呼ぶが、応用上、従順でない群も扱わなければならないことが多い。そこで私は従順性を大幅に弱めた条件である完全性（exactness）について研究をしている。特に群の完全性の便利な特徴づけを得て、それまで別々に行われていた先行研究を統合し、どのような群が完全であるかを調べた。すべての群は完全であるという予想が当時あったが、この研究の結果、よく知られている群のほとんどが実際に完全であること、しかし世の中には完全でない群も存在することが判明した。完全性は作用素環論における群の取り扱いにおいて重要なほか、幾何学における重要予想である強Novikov予想を導くことが知られている。また、$\mathrm{II}_1$ 因子環の分類問題に幾何学的アイディアを導入することにより、これまでにないまったく新しい現象を発見した。この新理論にはエルゴード理論における軌道同値問題への応用もある。

群に関する解析学は我々の日常生活にも関与している。非常に高い連結性を持ちながらも、辺の数が少ない有限グラフのことをエクスパンダーと呼ぶ。（右図は８０個の頂点からなる平面エクスパンダーである。どのような１０個の頂点を取り除いても、一番大きい連結成分は４０個以上の頂点からなる、などといった性質を持ち、強靭なネットワークであると言える。）エクスパンダーは、作用素環論を含む「純粋」数学において重要なだけでなく、理論計算機科学、ネットワーク理論、誤り訂正符号理論などの「応用」数学に対する応用も豊富である。いくらでも大きなサイズのエクスパンダーが存在すること自体は古くから知られていたが、初めて具体的に構成したのはGregory Margulis（１９７３）である。その構成には群の解析学（表現論）における深甚な定理が使われている。



エクスパンダー

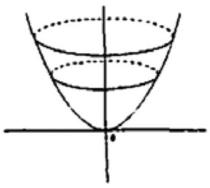
Margulis の手法（あるいはその改良）によればエクスパンダーを作るにはKazhdan の性質（T）を持つ群が必要である。この分野では最近Yehuda Shalom によるブレイクスルーがあり、想像以上に多くの群がKazhdan の性質（T）を持つことが示された。私はShalom が提出した問題を解決し、彼の結果を改良することに成功した。すなわち、性質（T）に付随する定数の評価を得られる別証明を得た。これはエクスパンダーの連結性がどれくらい高いかを評価するのにも使われる。

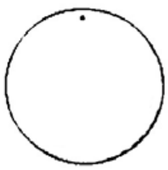
# 桂　利行

## 正標数の代数幾何と情報理論

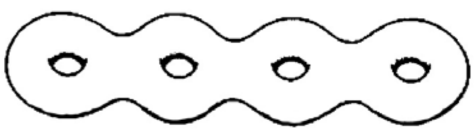
代数幾何学は代数多様体という図形を研究する数学の分野である。代数多様体とは、単純化して述べれば、いくつかの$n$変数多項式の共通零点のなす図形であり、この図形を貼り合わせることによって一般の代数多様体が得られる。$p$をあるきまった素数とし、１を$p$個加えると０になるとき標数$p$、あるいは正標数であるという。正標数の世界で図形を考えれば複素数の世界で考えた時とは違う独特の現象が現れることがある。そのような現象を解明することが本研究の目的である。

研究の対象が与えられた時、その対象を分類することはそれらをよりよく理解するために有力な方法である。代数多様体が与えられた時、独立に動きうる変数の数をその代数多様体の次元という。１次元代数多様体を代数曲線、２次元代数多様体を代数曲面という。代数多様体が滑らかで、尖ったり重なったりする点が存在しない時、非特異代数多様体という。また、無限に発散しないで閉じた代数多様体を完備代数多様体という。

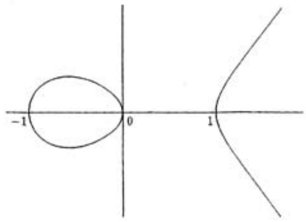


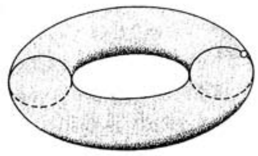


ここでは、非特異で完備な代数多様体を研究の対象とし、それがどのくらい存在するか考察する。複素数を係数にする場合には、非特異完備代数曲線は、連続変形によって（位相的に）いくつか穴のあいた浮き袋のような形になるころが知られている。



この穴の数$g$を非特異完備代数曲線の種数という。種数は分類の重要な離散的不変量であり、種数が違えば代数曲線として異なる。種数が同じである代数多様体はどのくらい存在するのであろうか。これは連続パラメータの問題になるが、種数$g=0$のときには射影直線$P^1$ただ一つしか存在しない。種数$g=1$の代数曲線は楕円曲線といわれる。楕円曲線は$j$-不変量と呼ばれる任意の複素数を取りうる連続的不変量を持ち、$j$-不変量と楕円曲線が１対１に対応することが知られている。$j$の取りうる値全体は複素平面であるから、それを$M_1$とおいて楕円曲線のモジュライ空間という。種数$g \geqq 2$の代数曲線に対してもモジュライ空間$M_g$が存在し、種数$g$の代数曲線とモジュライ空間$M_g$の点が１対１に対応する。また、$M_g$は$3g-3$次元の代数多様体の構造を持つことが知られている。



２次元の場合にも離散的不変量による分類理論や、連続的不変量としての様々なモジュライ空間が構成されている。我々の研究では、アーベル曲面やK３曲面という小平不変量が０である代数曲面のモジュライ空間を取り上げ、正標数に於いて特有の部分多様体の構造を分析している。これは、１次元の場合には楕円曲線に対応する部分であり、豊かな構造を秘めている。高次元のアーベル多様体やK３曲面の一般化であるガラビ・ヤウ多様体のモジュライ空間も重要な研究対象である。

情報理論との関係については、１９８０年代はじめにGoppaによって、代数幾何符号が発見され、正標数の代数曲線の理論が誤り訂正符号の理論に用いられることが見い出された。その応用として、それまで知られていなかったVarshamov-Gilbert限界式を超えるような符号がTsfasman-Vladut-Zinkによって構成された。暗号理論に於いては、楕円曲線暗号が１９８５年にKoblitzとMüllerによって独立に発見され、現在では実用の域に達している。種数の大きな正標数の代数曲線のJacobi多様体を用いた暗号も考案されており、暗号理論で活用されている。代数幾何学とこのような領域の交流を図り、新しい知見を得ることも興味ある課題である。

# 河東泰之

## 作用素環と数理物理学の研究

私の研究内容は、作用素環論を用いて、理論物理学に現れる数学的構造を研究することです。作用素というのは、だいたいはサイズが無限大の行列のことで、物理学では演算子と呼ばれています。それがたくさん集まったある種の集合が作用素環です。この理論を創始したのはフォン・ノイマンで、1930年代のことです。フォン・ノイマンは、現在のコンピュータの理論的基礎を築いたり、ゲーム理論を創始したり、「量子力学の数学的基礎」という基本的な名著を書いたり、あらゆる方面で活躍した20世紀最大の科学者の一人ですが、彼の純粋数学における最大の業績が、作用素環論を創始したことと言えるでしょう。その中心部分はマレーとの共同研究でした。

フォン・ノイマンのこの研究の動機の一つは、上で挙げた著書「量子力学の数学的基礎」にもあるような物理学との関係でした。その後、物理学と関係した研究と純粋に数学的な側面の研究の両方が入り混じって発展してきました。私は最初純粋に数学的な構造を研究していましたが、10年ほど前からだんだんと、物理学とと関係する話題に重点を移してきました。

物質の質量や位置は普通は、数（あるいは数の組であるベクトル）と考えられますが、これらをはじめとする物理量を数ではなく作用素と考える、というのが量子力学の基本的な考えです。そして、普通の数を足したり掛けたりするように、作用素を足したり掛けたりできるような枠組みが作用素環です。時空領域ごとに、そこで観測可能な物理量を表す作用素たちから作られる作用素環を考えることにより、作用素環の族ができます。このような作用素環の族を数学的に考えようという理論が50年ほど前から考えられてきました。数学理論としては、ある種の条件を満たす作用素環の族を構成する、分類する、それらの種々の性質の間の関係を調べる、といったことが問題になります。時空とその対称性を指定するごとにこの種の問題が考えられますが、2次元時空（1次元の空間と1次元の時間）の上で高い対称性を考えた場合が、共形場理論と呼ばれ、最近20年間ほど、数学、物理学の両方から盛んに研究されてきました。この構造は、現代数学の非常に幅広い範囲の話題と関係しており、また物理学の超弦理論にも自然に現れるからです。これが私の研究テーマです。

これまでの私の成果は、上のような作用素環の族の表現論、分類理論、新しい例の構成、他の数学的手法との関連の解明などです。（他の数学的手法としては、頂点作用素代数、量子群などが有名です。これらはまったく別の目的のために開発された数学理論ですが、さまざまな深い関係があります。）特に、「中心電荷が1未満」という条件の下で、イタリアのLongoとともに、数十年の研究の歴史で初めての分類理論を完成し、これまで知られていなかった構成法を発見したことが最大の結果です。作用素環論を用いて物理学との関係を追及する他の手法として、Connesの非可換幾何学が有名ですが、最近はこの話題との新しい関係についても研究しています。

Jonesはこの種の作用素環論と、それまでまったく無関係と思われていた結び目の理論の驚異的な関係を1980年代に発見し、新たな一大分野を切り開きました。彼の発見した新しい多項式はJones多項式と呼ばれています。これは無限次元の空間と3次元の幾何学とを結びつける理論です。私はこの手法も道具として使っており、たとえば無限次元空間の行列を扱っているにもかかわらず、図のような絵を使った計算が次々論文に現れます。

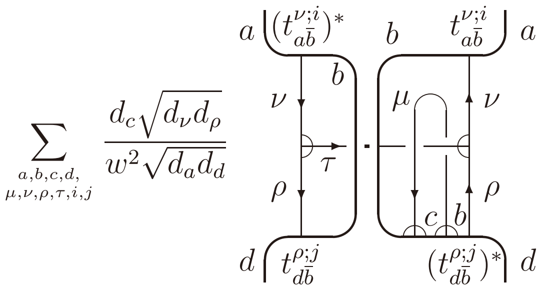


Figure 1: 計算の一部

# 川又雄二郎

高次元代数多様体の幾何学的な構造を、代数・幾何・解析の種々の方法を駆使して研究しています。私が研究を始めたのは30年以上前のことで、当時は「3次元」といえば何が起こっているのか見当もつかない高次元でした。その後の発展によって、3次元はすでに身近な存在となり、4次元さらには一般のn次元も扱えるようになりました。

研究のキーワードになるのが「標準因子」です。標準因子は最大次数の微分形式から得られる余次元1の幾何学的存在ですが、Serreの双対定理やRiemann-Rochの定理などにさまざまに形を変えて現れ、その重要性は計り知れないものです。また、小平次元を使った代数多様体の分類は、代数多様体の幾何学的特性が標準因子から作られる標準環の構造によく反映されていることに基づいています。このところ関心を持っている導来圏の理論では、標準因子はSerre関手として現れ、純粋に圏論的に定義されることになります。

いま取り組んでいる課題は、極小モデル理論の完成という方向とその精密化である導来圏の構造の研究の二つです。研究者になりたてのころに取り組んだ代数的ファイバー空間の構造理論も重要な手法になっています。また、代数多様体単独の代わりに代数多様体とその上の因子の組を考えるという「log幾何学」の考え方も重要なモチーフです。

極小モデル・プログラムは、与えられた代数多様体から出発して、双有理変換を繰り返し施すことにより標準因子のレベルを下げて行き、極小モデルと呼ばれる代数多様体を構成しようというプログラムです。原石の角を切り落として宝石を切り出すようなイメージです。私は、極小モデル理論の基礎となる定理として、Kawamata-Viehwegの消滅定理および固定点自由化定理を証明しました。また、森重文氏による曲線の錐の構造定理を特異点も許した一般の対数的多様体に対して拡張して証明しました。さらに周辺の結果としては、代数的ファイバー空間に付随したHodge束の半正値定理と、その応用としてのsubadjunction定理を証明しました。固定点自由化定理は微分形式の延長理論に発展し、subadjunction定理とともにアバンダンス予想などへの応用が見込まれます。

極小モデル理論は、主目的のひとつであった標準環の有限生成定理がBirkar-Cascini-Hacon-McKernanによって証明され、ひとつの節目を迎えました。しかし、一般的な代数多様体に対する極小モデルの存在はいまだ証明されていません。これはフリップの終結予想が一般的にはまだ証明されていないためです。フリップの終結は、因子の錐の集まり(扇)の有限性と密接に結びついているので、さらに詳しく研究したいと思っています。因子の錐と曲線の錐は互いに双対な錐であり、単独の多様体に対しては同値な存在ですが、フリップの列などで現れる多くの多様体を同時に把握するためには、因子の錐のほうが便利です。双有理同値によって多様体を取り替えたり、境界の因子を変更するという操作を行うと、因子の錐は隣りの錐に「壁越え」をしてつながっていくという性質があり、この現象を解明することが重要です。壁越えは「フロップ」に相当しますが、導来圏で考えると、表側または裏側を「壁廻り」することになります。

極小モデルの存在とともに、残された大問題が「アバンダンス予想」です。この予想は、もともと極小モデルの幾何学的性質に関するものですが、仮にアバンダンス予想が一般化された形で解ければ、極小モデルの存在も従うことがわかっています。そのためには微分形式の延長理論をさらに進化させることが必要になります。

極小モデル理論によって得られる代数多様体の構造論を、さらに精密化したものが導来圏の理論です。極小モデル理論における3つの基本的操作(因子収縮写像、フリップおよび森ファイバー空間)は、代数多様体のモデルを取り替えて、標準因子のレベルを下げていくという操作ですが、これが導来圏の半直交分解に対応しているとする哲学があります。しかし、極小モデル理論では自然に特異点をもった多様体が出てくるため、そのままでは導来圏の議論がうまく進まないことが知られています。したがって、正しい導来圏を特異点を持った一般の多様体やさらには対数的多様体に対して定義し、極小モデル・プログラムと導来圏の半直交分解が対応することを証明することを目標としています。

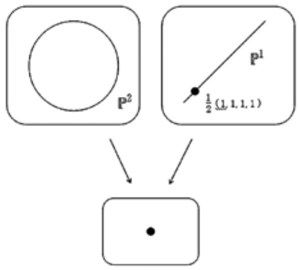



図1.
4次元フロップの例
(Franciaのフロップ)
次元が異なる例外集合が出てくるが、導来圏は同値である。

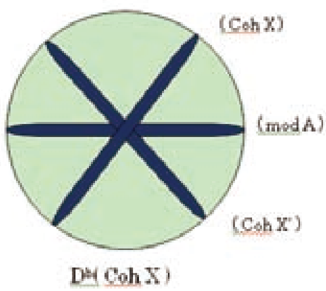



図2.三角圏のt-構造
導来圏はより多くの対称性を持ち、構造の本質をとらえている。

# 楠岡成雄

## 確率解析の応用

確率解析は今日多くの分野で応用されている。本プロジェクトでは特に、計算ファイナンス、金融機関におけるリスクの計量化と管理、古典力学モデルからのブラウン運動等の導出などに焦点を絞り研究を行っていく。

計算ファイナンスの研究においては、ヨーロッパ型デリバティブの価格付けを目的として、拡散過程の期待値の数値計算を主要な対象として研究していく。今日ファイナンスの実務では計算速度・精度の制約により、計算の容易なファイナンスモデルが用いられている。しかし、それらはしばしばファイナンス理論との整合性を欠いており、金融危機の一因ともなっている。現実の市場価格を説明できる整合的なモデルは、複雑なものとならざるを得ないが、それが実務で用いられるには新たな計算手法の開発が必要である。この研究では楠岡近似を含む精密な計算法の開発、漸近展開法の研究などを中心に経済学研究科の高橋教授とも協力して研究を行っていく。また、ジャンプ型過程やヨーロッパ型でないデリバティブの価格付けなどにおいても新たな手法の開発にも取り組みたいと考えている（図は楠岡近似が従来の近似法より効率的であることを示している）。

金融機関におけるリスク管理に関しては、現在理学部で行われているアクチュアリー統計プログラムと関連して、リスク管理に関する統計的手法の開発を目的として本研究科の吉田教授とも協力して研究を行っていく。リスクの計量化は金融機関に対する国際的規制とからんで研究されているが、規制が合理的かつ現実的であるか、リスクをどう管理すべきかはまだ余り明らかになっていない。リスクの計量化や管理の手法の開発や、確率論の古典的研究では余り着目されなかった分布の裾野に対する統計的推測などの研究を特に行っていく予定である。

古典力学モデルにおけるブラウン運動等の導出は古くから研究されている問題であるが、現在までの所、特別な場合にのみ問題が解決されているにすぎない。決定論的な方程式から確率統計現象を導くことは、科学における確率の意味を考える上で重要であり、基礎方程式がはっきりしている古典物理学を対象として研究を行っていく。

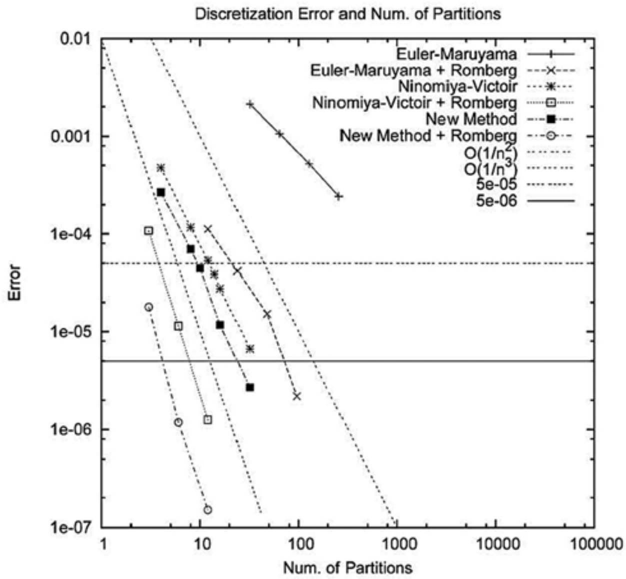



FIGURE 6.1. Error coming from the discretization

# 小林俊行

## リーマン幾何学の枠組みを超えた不連続群

【局所から大域へ】

局所構造は大域構造にどのように影響するか？　この主題は、計量が正定値であるリーマン幾何学においては、20世紀以来の幾何学における大きな潮流となり、著しい発展をとげてきた。

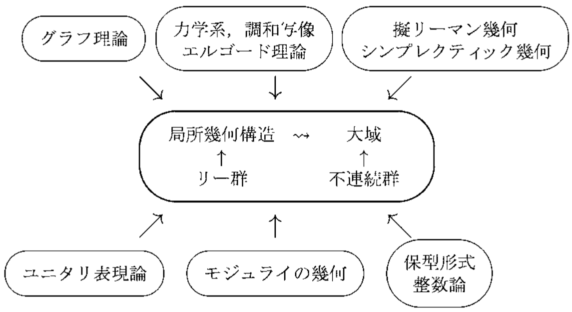
より一般の幾何構造に対してはどうだろうか？　たとえば、相対性理論における時空（ローレンツ空間）のように不定値の計量をもつ空間では、等長変換からなる離散群の作用は真性不連続とは限らない。このような現象も、大域的な構造に重要な役割を果たすはずなのである。実は、不定値計量の場合を含む一般の幾何構造に対する局所から大域への研究は20世紀の幾何学の潮流に乗り遅れた感があった。

【不連続群の理論】

局所構造が均質の場合には、局所的な幾何を統制するのが等質空間であり、大域的な構造を統制するのが不連続群である。

当事業推進者は1980年代後半に、世界に先駆けて、不定値計量の場合をも含む等質空間の不連続群の本格的な研究に着手し、真性不連続性の有効な判定条件を求めた。これに引き続き、不連続双対、閉じた大域形の存在問題、剛性、幾何構造の変形空間などの基礎的な研究を行ってきた。

上記の研究によって生まれたこの研究領域では、現在では、下図のように分野の枠を超えた発想に基づく新たな研究も行われ始め、多重の進展をみせている。局所から大域につながる理論はまだまだ謎に包まれている。




非リーマン等質空間不連続群論

## 代数・幾何・解析にまたがる無限次元表現の理論

【分岐則の理論】

空間の対称性を扱う数学を表現論と言うならば、その対称性の破れを扱うのが分岐則の理論である。

無限次元において生じる分岐則の解析的困難（“悪い砕き方”）を分析することによって、逆に、良い分岐則（“きれいな砕き方”）の定式化と重要性を提唱した。とりわけ、超局所解析の手法を用いて、有限重複度と離散性を併せ持つ分岐則の特徴づけを与えた（離散的分岐則理論の3部作1994－1998）。“きれいな砕け方”の理論は、無限次元表現の研究に新たな手法と研究領域をもたらし、さらに、等質空間上の大域解析に重要な離散スペクトラムの構成や、モジュラー多様体のトポロジーの研究の手法に使われるなど、異分野への応用も生まれている。

【極小表現の解析】

“根源的な表現”とは何だろうか？　分解という観点からは既約表現が最小のものであるが、構成という観点もこめて、さらに根源的なものを探せば、“源流”といえる表現は実はごく少数しかない。極小表現（例えば、C型単純リー群のWeil表現）はこの意味での“根源的な表現”といえる。

当事業推進者は、D型単純リー群の極小表現が、表現論の手法による構成だけでなく、全く異分野の数学に出現することを発見した。たとえば、共形変換群の無限次元表現を山辺作用素を用いて一般的に構成し、その特別な場合として、極小表現が出現するのである。この幾何的な構成はまた、ウルトラ双曲型方程式の解の共形不変量や、錐上の“Fourier変換”の発見につながった。

【ただ一つ（無重複表現）の理論】

同じ既約成分は二度と現れないという表現（無重複表現）は特に重要な概念であり、組合せ論等さまざまな手法によって、20世紀前半より多くの例が（散在的に）発見されてきた。最近、複素多様体における“可視的な作用”という概念を提唱した。この概念を用いて、無重複表現を有限次元の場合も無限次元の場合をも含めて、統一的に把握する新しい理論の構築を目指している。

## 研究・教育活動

ヨーロピアンスクール等の海外のサマースクールでは、15年間に亘ってほぼ隔年で基調講演を行ない、国内だけでなく海外の研究活動・教育活動においても、指導的な役割を果たしてきた。

東京大学数理のGCOEの幾何学部門の統括者として、また、無限次元表現研究班の統括者として、今後も研究と教育の推進に役立てれば幸いである。

# 斎藤　毅

## すべての道は素数へ続く

３世紀以上もの間、数多くの数学者を退け続けてきたフェルマーの最終定理がついに証明されたことが話題になったことを覚えている方も多いだろう。これが解決されたからといって、整数に関する問題がすべて明らかになったということではない。しかしこの成果は、人間がこれまでに築きあげてきた、数に対する理解の１つの頂点を示すものである。それは同時に、整数のこれからの発展への展望を切りひらくものでもある。

フェルマーの最終定理そのものは中学生にも説明できるといわれるように、数論では、誰もが知っている数の性質を探求する。しかし、問題が素朴だから簡単だというわけではない。素朴にみえる問題の難しさは、手がかりが見えないところにある。19世紀の数学界に君臨したガウスは、数論を「数学の女王」と呼んだ。それは、数論それ自体の魅力とともに、数学を１つに結びつける数論のもつ力をさすものだろう。数学の１つの分野での発見は、数に対する理解への隠されていた手がかりとして、数論の進展につながるのである。

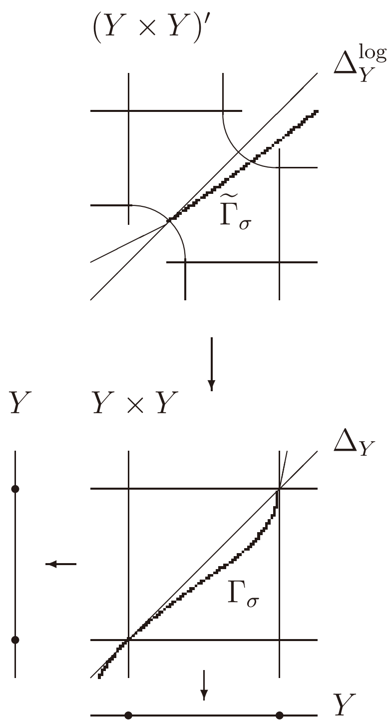
人類の数に対する理解は、数の世界を広げることで進んできた。１つ、２つと数えることではじまる自然数から、引き算で整数へ、割り算で分数へという具合である。それに対し、ふつうの数と思われている実数は、数直線上の点としてとらえられる。これがあまりに自然な考え方だったため、そのほんとうの意味が明らかにされたのは、19世紀も終わりに近づいてからだった。

このように数の世界を広げる方法が認識されると直ちに、同じようにして数の世界を広げる方法がいくらでもあることが発見された。２, ３, ５, ７、…と、素数がいくらでもあることは、古代ギリシャのユークリッド「原論」で証明されていることだが、その素数１つ１つに、２進数の世界、３進数の世界、…という数の体系が見いだされた。フェルマーの最終定理が20世紀に証明できたのは、整数を２進数、３進数、…と考えることが、整数を実数と考えるのと同じくらい自然なことであり、重要なことであるということがわかったからだ、ということができる。

19世紀の解析学の大きな成果である関数論は、素数の分布の研究に応用され、現代数学の最大の未解決問題とよばれるリーマン予想を生み出した。20世紀の抽象数学の花形である代数幾何は、ヴェイユ予想の解決をもたらし、素数を「点」と考える視点が確立した。群の無限次元表現論は、類体論の非可換化を可能にし、現代の数論の中心的問題であるラングランヅ対応へと導いた。フェルマーの最終定理の素朴さの影に隠されていた手がかりは、このラングランヅ対応だった。

この、代数幾何を使って整数論を研究する数論幾何が、私の研究分野である。これは、ｐ進体、代数幾何、ガロワ表現が交錯する活発な研究領域である。数のもつ隠された対称性は、ガロワ群の中に読み取ることができる。ガロワ群と代数幾何は、ヴェイユ予想の証明を可能にしたエタール・コホモロジーによって結びついている。この結びつきを通して、両者の関わりを調べる、幾何的な分岐理論が専門である。ラングランヅ対応と分岐理論の関係についての研究は、現在世界的に活発に研究が進んでいるｐ進局所ラングランヅ対応への契機を与えるものとなった。

数論と微分方程式は、一見かけ離れているように見えるが、グロタンディークらによるエタール層の理論と、佐藤幹夫、柏原正樹らによって創始された微分方程式のＤ加群の理論の間には、表面的なものにとどまらない密接な類似がある。この数年は、超局所解析と分岐理論の類似を研究し、特性多様体の定義やオイラー数の公式などの成果があがっている。



# 高橋明彦

## 数理科学とファイナンス

ファイナンスにおける金融資産の価格付けやヘッジ戦略、資産運用におけるポートフォリオ選択に関する研究を行っている。これらの問題は将来の不確実性を伴うため、その解決には確率論、統計学が有用であり、また、実務的には具体的な数値を得ることが重要であるため、数値解析学も有用である。一方、1950 年代のマーコヴィッツのポートフォリオ選択に関する研究以降、金融経済学が急速に発展し、様々な概念、理論が生まれてきた。以上を背景として、ファイナンスにおける具体的な問題の解決に取り組んでいる。

主な研究としては、まず、マリアヴァン解析により数学的に正当化される漸近展開と呼ばれる方法を用い、ファイナンスの諸問題に対して、具体的な数値的近似解を求めるスキームの開発・研究を行ってきた。

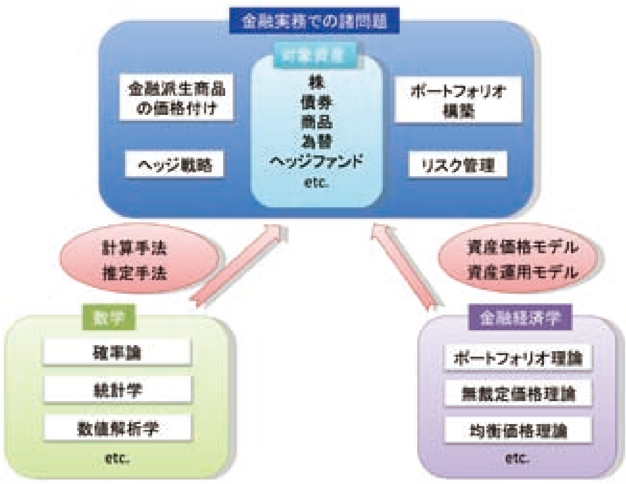
ファイナンス実務における有用なモデルでは、一般に真の解を陽に求めることは困難であり、モンテカルロ法や偏微分方程式における有限差分法など大きな計算負荷を伴う数値計算法に頼ることが多い。一方で、実務の現場ではトレーディングやリスク管理の観点から、瞬時に高精度な解を求めることが重要である。漸近展開法は、一つの近似解を小さい計算負荷で解析的に与えるものであり、その手法は様々なモデルに対し統一的な計算スキームにより適用可能である。このためファイナンスの多くの分野で応用されており、中でもそれまで一般には評価の難しかった Heath-Jarrow-Morton モデル等の確率的金利モデルの下での債券・債券デリバティブ、Libor Market Model に従う確率的金利・確率的ボラティリティモデルの下での為替デリバティブ、また原油などのコモディティ市場で一般的なアベレージオプションなどに対する解析価格近似解を与えた。また、漸近展開を活用しモンテカルロ法における新しい分散削減法を提案し、伊藤過程やジャンプ拡散過程の下での各種デリバティブ価格の計算及び、動的な資産配分問題における最適ポートフォリオの計算などに対し本手法の有効性を示した。さらに "Greeks" と呼ばれるデリバティブ価格のリスク感応度に対しても本手法が応用できることを示した。

金融商品に関する他の研究としては、まず、企業の倒産リスクを考慮に入れた転換社債の価格付けに関する新しい実用的なモデルを提案した。また、原油や金属などの商品先物価格を表現する確率モデルとそれに基づく効率的なヘッジ手法も考案した。さらに、資産価格の瞬間的なジャンプ或いは確率的ボラティリティを考慮に入れたモデルの下でのデリバティブに対する新しいスタティック・ヘッジ手法を提案した。

資産運用に関する研究としては、ヘッジファンドのポートフォリオ選択とそのリスク要因に関するファクター分析を行い、それらを統合して実際のファンド・オブ・ヘッジファンズ運用に活用した。また、近年金融機関が提供しているヘッジファンド複製商品に関する研究も行っている。さらに、複数のイールドカーブ・モデルを用いて債券の最適ポートフォリオを具体的に導出する研究も行った。

モデルの状態変数やパラメータの推定に関する研究としては、状態空間モデルの一つの推定方法であるモンテカルロ・フィルタを用いて金利の期間構造や投資信託ファンドのファクター・エクスポージャーの動的な変化の推定手法を提案した。

最近では、確率微分効用に基づく均衡モデルを用いて、金利の期間構造とマクロ経済の構造変数との関係を調べる研究も行っている。



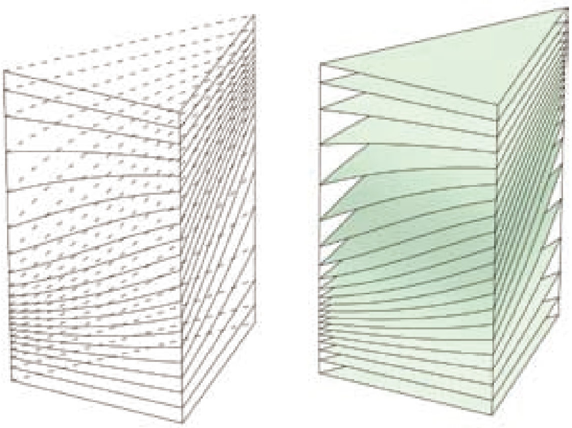
# 坪井　俊

## 多様体の微分同相群

多様体の定式化は20世紀前半におこなわれた。現在、多くの数学研究が多様体あるいはその上の構造を扱っている。多様体の微分同相群は、多様体自体の対称性を記述する群である。現在は多様体の微分同相群の群としての性質を研究している。

### 微分同相群

多様体$M$の$C^\infty$級微分同相全体Diff(M)を考えると、$M$から$M$自身への$C^\infty$級写像全体の空間の開集合として位相空間となる。Diff(M)の上の曲線は、アイソトピーと呼ばれる。Diff(M)の恒等写像の弧状連結成分Diff(M)$_0$は、微分同相群の正規部分群をなし、特に面白い研究対象である。微分同相群Diff(M)の研究は、Diff(M)$_0$の研究と写像類群$\pi_0$(Diff(M))の研究をあわせておこなうべきものである。葉層構造の理論との関連で、コンパクト連結多様体に対して、Diff(M)$_0$が単純群であることがHerman-Mather-Thurstonにより30年以上前に示されている。すなわち、この群の正規部分群は、それ自身と、単位群の2つである。

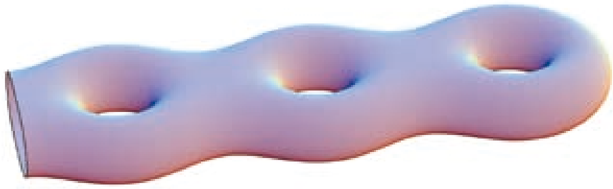


このような葉層構造は葉層積構造と呼ばれる

### 一様完全性、一様単純性

微分同相群Diff(M)$_0$が単純であることは、実はDiff(M)$_0$が完全であること、すなわち、アーベル化が単位群であることから示される。すなわち、Diff(M)$_0$の元は、交換子の積に書かれる。これは、幾何的には、境界を1つ持つ向き付けられた種数$g$の曲面$\Sigma_{g,1}$に対して、$\partial\Sigma_g$,1×$M$に与えられた$M$方向に横断的な葉層構造が、$\Sigma_g$,1×$M$の$M$方向に横断的な葉層構造に拡張することをいっている。$g$は、積に現れる交換子の個数であるが、Diff(M)$_0$の元を表すために必要な交換子の個数の最小値を交換子長と呼ぶ。最近、多くの多様体に対して、Diff(M)$_0$の元の交換子長は有界であること（一様単純性）を示したが、現在は、それが示されていない場合について研究を進めている。Diff(M)$_0$については、完全性から単純性が導かれるのであるが、それはDiff(M)$_0$の単位元ではない元$f$, $h$をとると、$f$は$h$または$h^{-1}$の共役の積に書かれることをいっている。Diff(M)$_0$の一様単純性から、共役の積の個数も有界となること（一様単純性）がわかる。

一方、無限単純群で、一様有界であるが、一様単純でないものも多く存在し、これらについても研究を進めている。

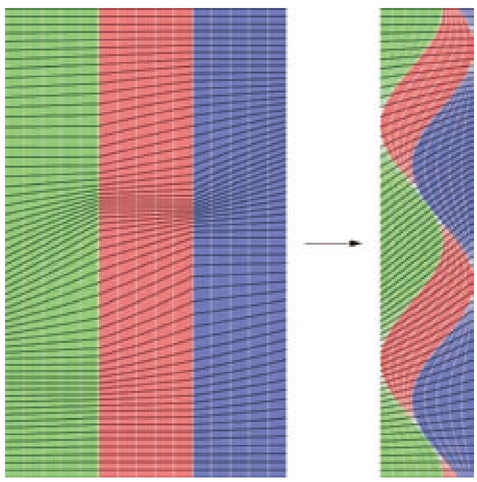


$\partial\Sigma_{3,1}$は、$\pi_1(\Sigma_{3,1})$で3つの交換子の積となる

### 正則性

実は、微分同相群Diff(M)の群としての性質は、微分同相の微分可能性に依存している。微分可能性$C^0$級、$C^1$級などでは、Diff(M)から定義される空間$B\overline{\mathrm{Diff}}$(M)の高次元のホモロジー群が消えているが、$C^2$級を超えると、$M$の次元より少し大きな次元のホモロジー群が著しく非自明になることが、葉層構造の特性類を用いて示されている。

一方、現在の非常に面白い問題は、実解析的な微分同相群Diff$^\omega$(M)$_0$の性質である。この群については、円周作用がある多くの場合に、完全性が証明されるが、ほとんどの多様体については、これからの研究課題である。



実解析的アイソトピーの分解

# 寺杣友秀

## 周期写像とモチーフに関連する代数幾何の研究

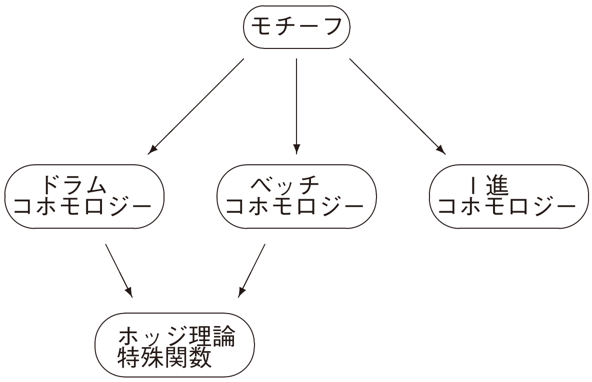
超幾何関数やテータ関数などの一連の特殊関数を現代的な取り扱うための標準的な手法として、これらを代数多様体の周期写像として捉える方法がある。代数多様体の性質と関数論的性質の関係に注目し、相互の言語に翻訳することにより、代数幾何的な写像や対応を関数論的視点から発見する事、関数論的関係式を代数幾何的に理解し、より視覚的に捉え、物事を単純化する事が可能となり、それらの一般化、類似物の発見に役立てることができる。またそれまであまり関係が明確でなかったものの類似性を発見することができる。これまでテータ関数、超幾何関数、多重対数関数、多重ゼータ値、基本群の周期積分に関する研究をこのような視点から行ってきた。

それらの研究成果の具体例と現在進行している研究について述べよう。まず超幾何関数を代数多様体の周期写像と考えることにより物事が見やすくなるような物の例として超幾何関数の行列式に関する等式がある。この等式は曲線の対称積と高次元多様体の間の代数的対応という幾何的対応物の存在を介して見つけられた。これから青本・ゲルファント超幾何関数を積分表示するときの微分形式のシューア基底や位相的サイクルのよいとり方が見つけられた。もう一つ超幾何関数と関連する幾何学的対象物の例として、青本・ゲルファント超幾何関数とフェルマー多様体の完全交叉があげられる。ゲルファントの超幾何関数に関する双対定理の代数幾何的証明、つまりこの双対定理が代数的対応に起因するかどうかを問う問題が考えられる。実際にその代数的対応が構成され、その構成の発展として、完全交叉に関するホッジ構造の取り扱いに関する一般的な原理が得られ、大域的トレリの問題に応用された。

次にテータ関数の等式などへの代数的対応の応用について述べよう。テータ関数、テータ定数は周期が既知であるアーベル多様体に対して射影埋め込みや、モジュライ空間の射影埋め込みに用いられる。このモジュライ空間はIII型領域であるが、その他の型の領域でもIII型領域に埋め込める場合が多くある。その例としてドゥリーニュ・モストウ・寺田の分類に現れるモジュライ空間、さらにその特殊なものとしてアルコック・カールソン・トレドによる３次の巡回群の作用する３次元３次超曲面のモジュライ空間などがある。３次超曲面の場合はクレメンス・グリフィスによって見つけられた偶発曲線がドゥリーニュ・モストウ型の曲線と代数的対応で結びついていることがわかる。これを用いて逆周期写像をテータ関数により表すことができる。テータ関数に関する最近の話題としては、トマエの公式やそれを応用した算術幾何平均を幾何学的に取り扱う研究をしている。

上記にのべた幾何学的対象物は本質的に非特異・コンパクトな代数多様体に関連するものだが、開多様体のコホモロジーと関連する混合ホッジ構造の周期写像に由来する特殊関数として多重対数関数などがあり、その特殊値として多重ゼータ値などがある。とくに多重ゼータ値に関してはさまざまな等式が存在するが、これまでに知られているものはすべて代数幾何的解釈からくるものに限られている。そのなかでも興味深い関係式として２重シャッフル関係式があるが、そこに本質的に現れる正規化調和シャッフル関係式についても幾何学的起源をもつことが知られている。これは、調和シャッフル関係式のｌ進表現的な類似物の存在を示唆している。これらの研究は今後の課題である。

現在は混合モチーフの枠組みで、基本群の相対完備化の構成に取り組んでいる。これらに関してはハイン、松本、パールシュタイン氏らと共同研究を行っている。




モチーフと特殊関数

# 時弘哲治

## 超離散系の研究

セルオートマトン（Cellular Automaton=CA）は、直訳すると「細胞から構成される自動機械」となる。その名の示すように、有限個の状態をとるセル（細胞）から構成され、離散的な時間ステップで自分自身の状態を更新してゆく。簡単な時間発展の規則に従いながら複雑な時間発展パターンを示すことのできる離散力学系であり、空間変数、時間変数、とりうる値のすべてが離散的であるため、丸め誤差などの心配がなくコンピュータシミュレーションに適している。たとえば、図１にルール90ECAと呼ばれる空間１次元で２状態をとるセルから構成されるCAの時間発展パターンを示す。このパターンは自己相似的であり、適当なスケール変換（縮小写像）のもとで極限操作をすると、典型的なフラクタルであるシェルピンスキー・ガスケット（Sielpinski gasket）に一致することを示すことができる。この例からもわかるように、微分方程式によって記述されるモデルでは再現することが困難な複雑なパターンも、CAは比較的簡単に再現できる。そのため、複雑な自然・社会現象のモデルとして研究され、生き物の紋様の生成、森林火災、高速道路の車の流れ、建物内部の避難経路などさまざまな問題に適用されている。

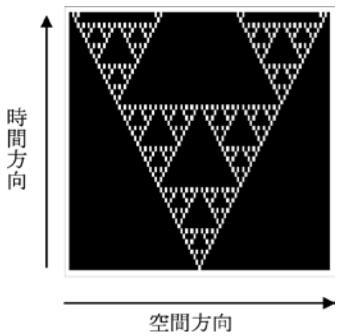



図１　ルール９０ECAの時間発展パターン

超離散系とは、連続的な方程式から極限操作で得られるセルオートマトン（Cellular Automaton=CA）である。代表的なものに、KdV方程式から得られる「箱玉系」がある。箱玉系は２状態をとるセルを空き箱と玉の入った箱として、CAを箱から箱へ移動する玉のなす力学系として捉えたものである。時間発展の１例を図２に示す。箱玉系は、（i）ソリトン解をもつ、（ii）十分にたくさんの保存量をもつ、（iii）初期値問題が解ける、など、KdV方程式に良く似た性質を持っている。KdV方程式は代表的な無限次元非線形可積分方程式であり、その超離散化である箱玉系も「可積分性」を反映して、豊富な数理的構造をもっている。超離散系研究のひとつの目的は、こうした可積分CAの数理構造を明らかにすることである。たとえば、周期条件を課した箱玉系では、組み合せ論的R行列による表示、逆散乱法による初期値問題の解、基本周期公式、基本周期の漸近的挙動および統計的性質の証明、基本周期公式とリーマン予想の等価性の証明、ベーテ仮設方程式におけるストリング仮説の意味づけなど興味深い結果が得られている。また、箱玉系の状態空間を量子系の線形空間と見たとき、時間発展規則はひとつの（非自明な）量子アルゴリズムと考えられ、応用上も重要である。

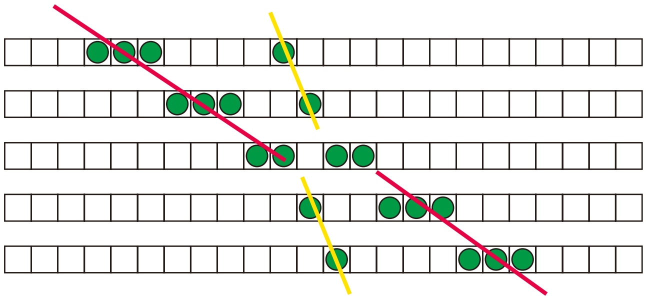


図２　箱玉系の時間発展パターン。３個からなる玉の列と１個からなる玉の列がソリトン的な散乱をしている。

自然・社会現象に対する微分方程式モデルとCAモデルを比較すると、微分方程式モデルでは解析的な考察が可能で厳密な数学的議論ができるが、数値的なシミュレーションは一般には困難である。これに対してCAは、数値シミュレーションは容易であるがその完全な離散性のため厳密な解析が困難である。超離散系では、対象とするCAは連続な方程式の極限として得られるため、その連続な方程式を通じてCAに対する解析的な取り扱いも可能になる。CAに対して厳密な解析手法を提供することも超離散系研究の目的のひとつである。逆に生物の生成や自己増殖モデルとして用いられるCAを逆超離散化することで、たとえば、フラクタルパターン（図3）や生物の貝殻のパターンを生成する偏微分方程式を構成することが可能になってきている。この偏微分方程式と化学・生物現象の基礎方程式である反応拡散系との関係についても研究している。

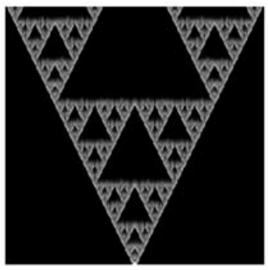


図３　図１のCAを逆超離散化した偏微分方程式の解。

# 野口潤次郎

## 複素解析学と複素幾何学

複素数は、今は高校で習います。まずは実数と呼ばれる数の体系がありその全体は**R**と表記され、四則演算（+、−、×、÷）と大小（例えば0 < 1など）があります。しかし、2次以上の方程式や、電磁気の性質などを数式で表現しようとするとそれだけでは不十分な数の体系であることが、すぐに分かります。そこで、二乗して「−1」になる虚数単位と呼ばれる数 $i$ を用いて $z = x + iy$（$x$ と $y$ は実数）と表記される数が導入されました。これは、複素数と呼ばれその全体は **C** と表記されます。この数の体系は、たいへん上手くできていています。例えば、未知変数を $X$ として、

$$X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

という任意の $n$ 次方程式を係数 $a_i$ を複素数としてとると、その根は全て複素数の中で解けることが分かります。実数だけですと $X^2 + 1 = 0$ は実数の範囲では解けません。実数の体系から複素数の体系へ拡大することで、大小の性質はなくなりますが、四則演算は保たれ、さらに良い性質を持つことになります。この複素数の体系を基にして解析学や幾何学を展開する数学分野を「複素解析学」、「複素幾何学」と言います。私の主な研究分野は、この両方または、境界分野に属します。

以下「数」と言えば複素数のこととします。さて複素変数 $z$ の次のような多項式（代数的関数）の列を考えます。

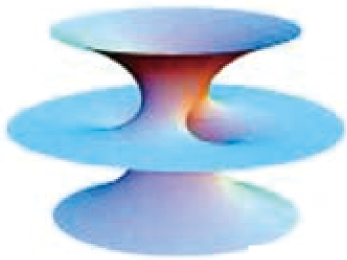
$$f_n(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \cdots + \frac{z^n}{n!}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

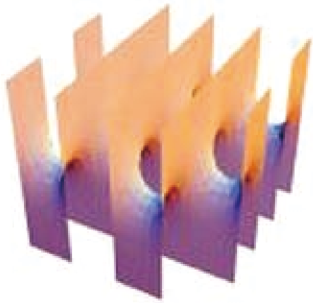
各 $n$ について $f_n(z) = 0$ は、$n$ 個の根を持ちますが、極限操作をして

$$f(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

を考えると方程式 $f(z) = 0$ は、根を全く持たなくなります。一方、任意の0でない数 $a$ に対しては、方程式 $f(z) = a$ は、無限個の根を持つことになります。例えば、$f(z) = 1$ の根は、$z = 2n\pi i$（$n$ は任意の整数）となる。このように代数的な関数が持ち得なかった性質を $f(z)$ は持つことになり、このような関数を超越的関数と呼びます。実際、$f(z) = e^z$ と書かれます。

関数は、複素数の全体 **C** から **C** への写像（対応）$f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ を決めます。更に、一般に局所的には有限個の複素数で表される座標を持つ宇宙を考えこれを複素多様体 $M$ となづけ、その中への写像（対応）$f : \mathbf{C} \to M$ を考えることができます。一般にこの $f$ は、超越的でその振る舞いを捉えるのは、たいへん難いものです。しかし $M$ は、宇宙ですので宇宙情報を持っています。この宇宙情報のことを数学者は「幾何構造」あるいは「幾何学不変量」と呼んでいます。興味深いのは $M$ の宇宙情報と部分空間 $D \subset M$ との交点についての情報で超越的な $f$ の振る舞いを捉えられる場合があり、この理論を「値分布理論」と呼びます。





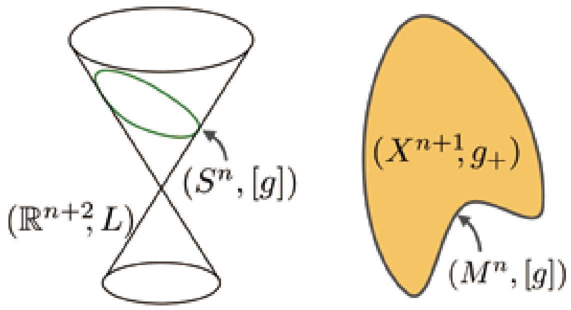
これは、宇宙 $M$ の曲がり具合（曲率）に大いに関係し、負極率の場合は、極端な場合には $f$ は、定値写像になってしまいます。このようなを $M$ は、小林双曲的多様体であると言います。この概念は新しく、小林昭七氏が1960年代に定義を与えたものです。1980年代後半頃から、この分野と有理数の近似理論であるディオファントス理論の間に理論的類似性があることが判明してきました。イロハ予想は、そのような中から生まれてきた予想で、これは、初めに述べた多項式方程式の係数 $a_i$ を有理数からとり、根も有理数で探す問題と深い関係があり、いわば問題がお里帰りしたような様子があります。値分布理論の研究は進展中で、世界の各所に研究グループがありますが、日本の研究グループは世界の中でも注目されています。

# 平地健吾

## 共形幾何およびCR幾何にあらわれるアンビエント空間

空間の対称性を調べるには、対象となる空間をより高い次元の空間のなかに入れる、あるいは低い次元の空間に帰着させるという手法が役に立ちます。

たとえばn次元球面の角度を保つ変換（共形変換）を求めるには、球面上の長さのスケーリングの自由度を錐とみなし、さらに錐をn+2次元ベクトル空間の中のローレンツ二次計量Lの零点集合として埋め込みます。このとき球面の共形変換はLを保つ線形変換として与えられます。

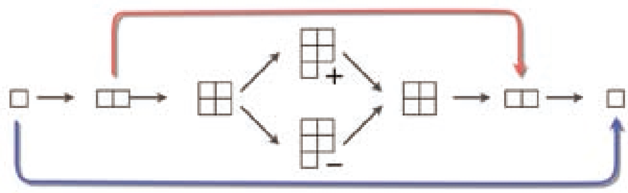



また理論物理においてはn+1次元の完備アインシュタイン多様体 $(X^{n+1}, g_+)$ と、その無限遠境界として現れるn次元共形多様体 $(M^n, [g])$ との対応がAdS/CFT対応として盛んに研究されています。これは古くから知られていた複素領域の幾何と境界の幾何（最近はCR幾何とよばれる）の類似と見ることもできます。

これらの対応を統一的にあつかうための理論がフェファーマン・グレアムのアンビエント空間です。上の円錐の図を曲がった共形多様体（角度だけをあたえた空間）$(M^n, g)$ について考えると、Mを含む錐は簡単に作れますが、錐を含む空間（アンビエント空間）の構成には工夫が必要です。一つの方法はローレンツ二次形式のかわりにリッチ曲率が消えるローレンツ計量Lを作るというものです。次元nが奇数のときにはこの条件でただ一つの計量がきまり、共形多様体 $(M^n, [g])$ とアンビエント空間 $(M, L)$ の対応がえられます。これはフェファーマン・グレアムにより20年前に証明され共形幾何の基本的な道具となっています。

ところが次元nが偶数だとアンビエント空間を決める方程式の解の構成に障害があらわれます。この困難は弱い特異性をもったローレンツ計量Lを考えれば回避できます。障害が現れるのは残念なことではなく、新しい不変量を構成する道具になるというのが理論のポイントです（グレアム氏との共同研究）。

共形多様体の曲りの大きさは変形複体とよばれる微分作用素の系列を用いて表すことができます。そこに現れるテンソルの対称性をヤング図形で表すと、例えば6次元での変形複体は次のようになります。



黒い矢印が古典的に知られていた作用素で次元の偶奇にかかわらず常に現れます。アンビエント空間の理論を用いれば、これら以外にも赤と青の二つの矢印に対応する作用素が一つずつ存在することが分かります。赤い矢が上述の障害を与えるテンソルです。青い矢は2n階の偏微分作用素でいくつかの興味深い性質をもちます。最も重要なのはこの作用素からQ-曲率とよばれるリーマン不変量が定義されるということです。Q-曲率は偶数次元空間だけに現れる対象で、最初にのべたAdS/CFT対応での繰り込み体積の表示にも現れます。アンビエント空間を作ること初めて計量の高次の微分を含む共形幾何の定式化が可能となり、新しい幾何的偏微分方程式論の始まりとなっています。


舟木直久


## 大規模相互作用系の確率解析

流体の運動など、物理現象における時間発展の法則は、一般に非線形偏微分方程式によって記述される。そのような物理現象の背後には、原子・分子等によって構成されるミクロ（微視的）な世界がある。それは巨大な自由度を持つ集合体であり、互いにきわめて複雑な相互作用をしながら時間的に変化する系である。これを大規模相互作用系という。マクロ（巨視的）な観測量に対する諸法則をミクロなレベルの運動法則から説明することは、統計物理とよばれる分野の目標であり、それに数学的な基礎付けを与えることは、確率論の重要なテーマの一つである。

筆者は、確率解析に基づく大規模相互作用系の研究、特にミクロとマクロを繋ぐスケール極限、最近は主として相分離と界面の形成に関わる問題に焦点を絞って考察を行っている。確率解析は伊藤清（平成２０年度文化勲章受章者）により創始され、その発展には日本人研究者たちの貢献も大きい。また、大規模相互作用系に対するスケール極限は流体力学極限とよばれ、その解析にはS. R. S. Varadhan（ニューヨーク大学）のエントロピー法が基本的手法として用いられる。物理的な系を十分低温で観測すれば、通常２つ以上の相（例えば水と氷）が共存する状態が生ずる。初期時刻で異なる相が共存していれば、それらを分離する境界面（界面という）が現れ、それは時間とともに変化していく。その時間発展の法則をミクロな系に対するスケール極限、特に流体力学極限の観点から考察することが研究目標の一つである。

流体力学極限とその基本原理である局所エルゴード性について簡単に説明しておきたい。原子の大きさ（約$10^{-10}$m）とマクロなレベルの長さ（1cm）の比は、$\varepsilon = 10^{-8}$程度であるから、ミクロな系に対して、空間スケールを$\varepsilon$倍に縮小する変換を施すことによって、マクロな世界の描像に移ることが可能になる（逆に、マクロからミクロな世界を覗くには$\varepsilon^{-1}$倍の顕微鏡が必要である）。ちなみに、体積比$\varepsilon^{-3}$はアボガドロ数$6\times 10^{23}$に匹敵する大きさである。ミクロからマクロな世界に移るには、空間のスケール変換と同時に時間のスケール変換も必要である。このような時空のスケール変換において$\varepsilon \downarrow 0$とする極限操作を行い、特に局所的なエルゴード性に基づく平均化を経由して、大規模相互作用系から非線形偏微分方程式等を導く過程を標語的に流体力学極限という。一般にミクロな系を考えるとき、マクロに短い時間であっても、それはミクロなスケールにおいては非常に長い時間である。したがってミクロな系はある種の平衡状態に到達すると予想される。しかし、ミクロな系の平衡状態は通常、一意ではない。その結果、マクロな時空の点ごとにその周辺のミクロな系を観察すれば、異なる平衡状態が現れると考えられる。これが局所平衡状態とよばれるものである。長時間にわたることに起因する平均化を局所エルゴード性という。流体力学極限の背後には、各点ごとに配置された平衡状態が連続的に連なり、それらが互いに影響を及ぼしながらそれぞれ平均化を起こしていくという描像がある。

このような描像を数学的に実現するために、種々の確率モデルを採用し研究を行っている。離散空間上のランダムウォーク粒子集団（格子気体）や連続スピン系などである。このようなモデルに対し局所エルゴード性を示すことにより、実際に様々な非線形偏微分方程式を導くことが可能になる。たとえば、反応拡散方程式、非線形な拡散係数を持つ放物型偏微分方程式、ステファン自由境界問題、非粘性バーガース方程式、ハミルトン-ヤコビ型方程式、平均曲率運動方程式、発展的変分不等式、流体のオイラー・ナビエ-ストークス型の方程式などである。

グローバルCOE「数学新展開の研究教育拠点」事業推進担当者として、他分野とも関わりを持つ研究を進め、数学の可能性を少しでも広げられるよう努力したいと考えている。

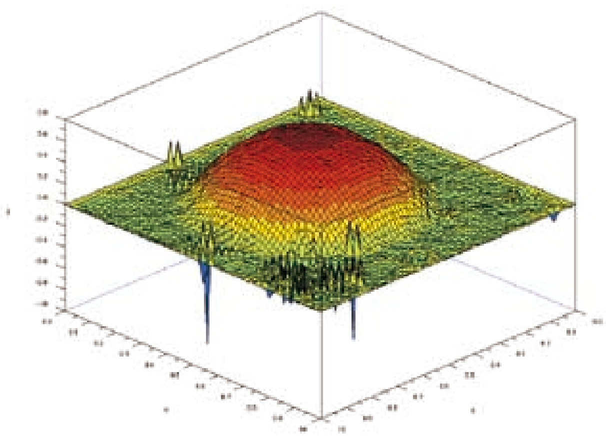


Figure 1: ウルフ図形
図１は安定な界面の形、例えば水平面の上に置かれた水滴の形、を示したものである。ミクロなレベルの界面の時間発展は、揺動の効果を加えたランジュバン方程式によって記述される。これは一種の確率微分方程式である。その解の時間$t\to\infty$の極限として図１のウルフ図形が求まる。確率微分方程式に対するオイラー-丸山法により数値計算を実行し得られた図形である。

# 古田幹雄

## ４次元の形

我々の住む宇宙は時間までいれると４次元である。少なくともそのように見えている。宇宙全体をその誕生から終焉までを「宇宙の外」から見ると４次元の広がりをもつ。ではそもそも４次元方向への広がった「４次元多様体」には、論理的にどんな可能性があるのだろう。人は、その可能性を分類し、そのどれが現実の宇宙であるかを問うことができるのだろうか。また４次元の時空をある時刻で切ると、３次元のある瞬間の宇宙が見える。では、宇宙のどんな形が、どんな時空の発展を可能にするのだろうか？

数学はこれらの問いまでは届かない。数学の役割は、４次元多様体の分類の試みまでである。後者の問なら次のように定式化するところから始まる。３次元多様体がある４次元の経過を経て別の３次元多様体に変形したとき、どのような変形が可能であるか。

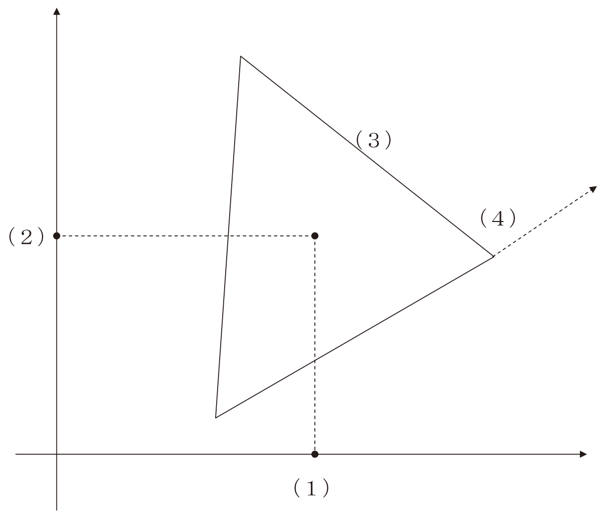
私のこれまでの研究は、このような問題に対するひとつの数学的なアプローチといえる。量子電磁力学のDirac方程式が定義可能な４次元多様体に対しては、かなり強い制約が見出されたことがひとつの成果であり、研究の枠組みは以下のような潮流の中に位置する。

自然界の多くの現象は偏微分方程式によって記述される。しかし、偏微分方程式の解を明示的に書き下すことは多くの場合まず不可能である。ある性質をもつ解の存在を示すだけでも容易ではない。しかし、興味深いことに幾何学的な方法によって、解が存在することを示せることがあり、そのような議論は、偏微分方程式が設定されているシステムの幾何学を深く反映している。

Atiyah-Singerによる指数定理は線形方程式に対してそのような方法を提供する。また逆に、指数定理を用いて、多様体の幾何学の深い性質を導くことが知られている。これは前世期半ばの大域解析学のひとつの頂点であった。なお前世期初頭すでに、関数解析学が線形偏微分方程式論のある側面を無限次元の線形代数として抽出していた。指数定理は、幾何学に現れる線形偏微分方程式のある族が、トポロジーと不可分に結びついていることを示している。関数解析学は、非線形偏微分方程式に対しても、無限次元多様体の幾何学としての理解の枠組みを提供していたが、さらに、幾何学に現れる非線形偏微分方程式が、トポロジーの枠組みと結びつくことは今から１９８０年代以降次第に明らかになってきた。

４次元トポロジーにあらわれる非線形方程式の代表は、物理学におけるYang-Mills方程式の特殊化として定義されるインタントン方程式とその変種である。それらの方程式の解空間から、Donaldson不変量，Seiberg-Witten不変量と呼ばれる４次元多様体の不変量が定義され、ゲージ理論と呼ばれるこの分野は多くの研究者によってこの３０年近く盛んに研究されてきた。

我々の方法は、直観的には次のようなものである。４次元多様体のある一部分から、エネルギーを注ぎ込み、偏微分方程式にしたがって波動を伝播させる。出口がなければ、それが多様体全体に行き渡ったところで特殊な波形があらわれる。このような現象を調べることにより、４次元多様体の幾何学を調べることができる。偏微分方程式の扱いを無限次元幾何学として考察するのが我々の指導原理であり、この有限次元にない無限次元特有の現象が見出されつつある。




xy平面上の正三角形全体の集合は４次元多様体をなす。
この集合の要素の指定には４個のパラメータが必要である。
（１）正三角形の中心のｘ座標
（２）正三角形の中心のｙ座標
（３）正三角形の一辺の長さ
（４）正三角形の辺の傾く角度

# 俣野　博

## 非一様媒質中の進行波

ある種の非線形偏微分方程式においては、解に一種の特異性ないし擬似特異性の「界面」が生じて空間内を伝播する現象が観察される。界面は、しばしば「進行波」という形で媒質の中を移動し、系の状態変化を周囲に伝達する役割を担う。この界面が生まれるプロセスを明らかにし、その運動の様子を調べることが、多くの複雑な非線形現象を理解する上での鍵となる。

進行波を生み出すメカニズムは多様であるが、その中でも拡散現象に起因する進行波は自然界に数多く見られる。神経パルスの伝播を記述するHodgkin-HuxleyモデルやFitzHugh-Nagumoモデルは特に有名であるが、これ以外にも、集団遺伝学、生態学、物質の相転移理論、化学反応論など多くの分野で研究されている。

これまでの進行波の研究は、主として一様な媒質中のものに限られていたが、最近、空間非一様な媒質中の進行波の重要性が注目を浴びるようになった。しかし、まだその理論的研究は緒についたばかりで、多くの性質が未解明である。とりわけ、準周期関数や概周期関数などで表される非周期的媒質の場合、そもそも進行波を数学的にどう定義すればよいかという基本的問題すら自明でないのである。

こうした進行波の存在や安定性を調べ、また、媒質の非一様性が伝播速度や波面の形状にどのような影響を与えるかを明らかにするのが私の研究の目的である。現在、下記のテーマに取り組んでいる。

（1）進行波の速度を最大にする周期的ポテンシャルを特定する最適化問題。

（2）ノコギリ型境界をもつ帯状領域における進行波とその均質化極限（図1）。界面の進行速度が境界の幾何学的形状にどう依存するかを明らかにする。

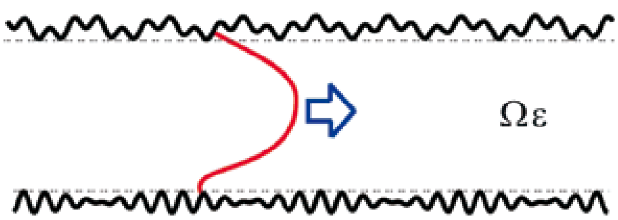



図１：ノコギリ型領域内の進行波

（3）ブドウ畑におけるカビ繁殖のモデルとして、帯状パターンをもつ環境下での伝染病拡散モデルの研究。

（4）ペンローズタイルなどの非周期的な媒質内で、周囲に広がる進行波面の漸近形状の解明（図2）。

（5）無数の穴の開いた壁を透過する進行波の研究。波面が壁の穴を透過できるかどうか、また、透過する際に何が起こるかを研究する。

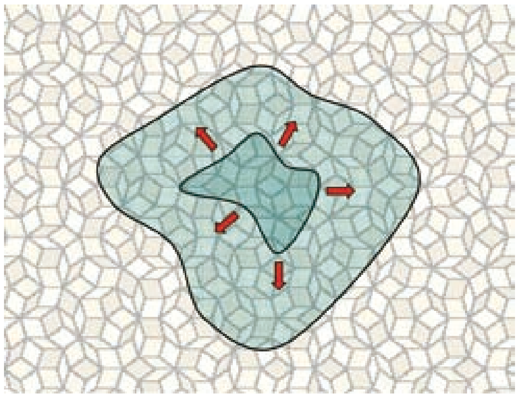


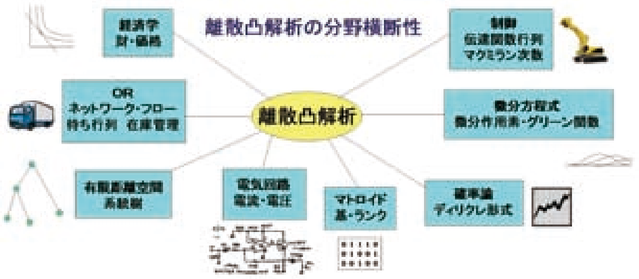
図2：ペンローズタイル内を広がる波面

これらの問題の研究には、特異摂動法、変分法、均質化理論などの解析手法に加えて、無限次元力学系の理論が大きく役立つ。とくに非周期的な媒質の場合、環境を定める関数の包（その関数の空間平行移動の全体の閉包をとったもの）という抽象的な集合の上で界面の挙動を記述することが重要となる。また、今後の研究では、これまで以上に数値シミュレーションを活用し、実験系の人たちとも連携しながら研究を進めたいと考えている。

# 室田一雄

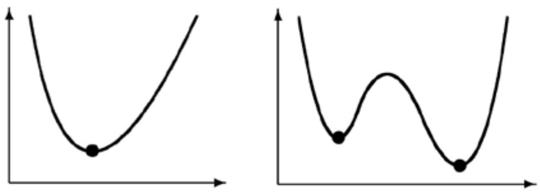
## 離散凸解析の理論と応用

連続世界と離散世界をつなぐ新しいパラダイムとして「離散凸解析（りさんとつかいせき）」を提唱して、その理論と応用を研究しています。離散凸解析の特徴を示すキーワードは「最適化」、「凸」、「離散」の三つですが、離散凸解析の応用は、数学、工学、OR（オペレーションズリサーチ）、経済学など様々な分野に広がっています。




「最適化」というのは、高校の数学でも習う最大・最小問題のことですが、橋の強度を保った上で重量を最小にするというような実際問題を意識しているときに、最適化という言葉をよく使います。建物や自動車のような「物」の最適設計の他にも、金融資産の運用、渋滞時の経路選択、コンビニの在庫管理など、「情報」の利用技術としても最適化は日常生活に浸透しています。

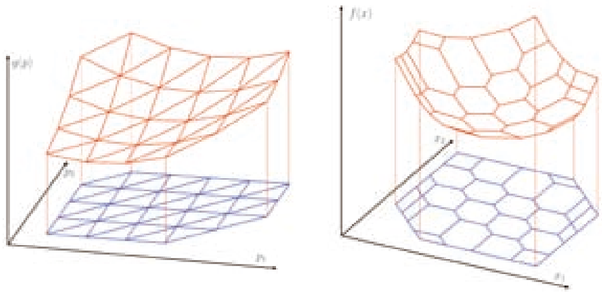
「凸（とつ）」というのは「でっぱっている」という意味です。数学で重要なのは、グラフが下向きに「でっぱっている」関数で、これを凸関数といいます。例えば、



の左側の関数は凸関数で、右側の関数は凸ではありません。凸関数なら、最小問題が楽に解けます。右側の関数には二つの極小点がありますが、そのうちの一つは最小点ではありません。これに対し、左側の凸関数では「極小＝最小」が成り立っていて好都合です。

「離散」というのは連続の反対で、バラバラの状態を意味します。例えば、実数全体は連続で、整数全体は離散です。連続＝アナログ、離散＝デジタル、と思っても構いません。インターネットは、地球のもつ地理的・幾何的連続性と無関係に構築された大規模な離散構造です。

離散凸解析では、$L^\natural$凸関数と$M^\natural$凸関数という二つの新しい概念を導入して、「凸関数と類似した離散構造」と「離散構造を兼ね備えた凸関数」を研究します。ここで、L は束（lattice）、M はマトロイド（matroid）という専門用語に由来する記号で、$L^\natural$は「エル・ナチュラル」、$M^\natural$は「エム・ナチュラル」と読みます。$L^\natural$凸関数と$M^\natural$凸関数は、ルジャンドル変換によって互いに移り合うという意味で、双対（共役）の関係にあります。



$L^\natural$凸関数 $g$ と $M^\natural$凸関数 $f$

歴史的に見ると、マトロイド理論における劣モジュラ関数の研究を通じて、離散構造と凸関数の関係が明らかになってきました。離散凸解析は、1980 年代の成果を 1990 年代後半に発展させたものと位置づけられます。

離散凸解析の歴史

| 年頃 | 項目 | 人名 |
|---|---|---|
| 1935 | マトロイドの概念 | Whitney |
| 1965 | 劣モジュラ関数と最適化 | Edmonds |
| 1975 | マトロイドの工学的応用 | 伊理, 冨澤, Recski |
| 1982 | 劣モジュラ関数と凸関数の関係 | Lovász, Frank, 藤重 |
| 1990 | 付値マトロイドの概念 | Dress, Wenzel |
| 1996 | 離散凸解析の提唱 | 室田 |
| 2000 | 劣モジュラ関数最小化アルゴリズム | 岩田, 藤重, Fleischer, Schrijver |

最適化理論やアルゴリズム理論との関係は当初より認識されていたことですが、最近では、在庫管理理論や有限距離空間の理論など、意外な方面との関係が見出されて、関係する分野がどんどん拡大しています。

# 森田茂之

## 曲面に関連するシンプレクティック群の表現と幾何学的不変量

２次元の広がりを持つ図形である曲面は、幾何学において基本的な役割を果たし続けている。まずガウスは、曲面の曲がり具合を表す量としてガウス曲率を定義し、それが全体の空間によらない曲面に固有な量であることを示した。この結果はガウス自身も驚いたと伝えられ、驚異の定理（Theorema Egregium）と呼ばれている。また、ガウス、ボヤイ、ロバチェフスキーは、それぞれ独立に非ユークリッド幾何学を発見した。さらにリーマンはリーマン面の概念を導入した。これらはいずれも曲面が舞台であった。

### 曲面は理想郷

上記ガウスの仕事は、リーマンによるリーマン計量の導入を経て成立した、微分幾何学と呼ばれる分野の源流と見なされている。またリーマン面の理論は、一般次元の複素多様体の理論へと大きく一般化された。さらにポアンカレは位相幾何学と呼ばれる新しい幾何学を創始した。このように、現代幾何学はいくつかの分野に分かれて発展してきた。しかし曲面においては、それらは本質的には同等の理論と見なすことができる。曲面は言わば数学世界における理想郷ということができよう。

**曲面上の二つの構造：**

$\left\{\begin{array}{l}\textbf{定曲率計量}\\ \textbf{リーマン面}\end{array}\right.$ **のモジュライ空間**

曲面上には種々の幾何学的な構造が存在する。代表的なものは、ガウス曲率が一定の定曲率計量およびリーマン面の構造であるが、曲面が理想郷である一つの証左として、それらは等価であることが知られている。これらの構造は多様に存在するが、それらの同型類全部を集めた空間をモジュライ空間という。この空間は代数幾何学、複素解析学、微分幾何学、位相幾何学、さらには数理物理学を含む多くの分野で重要な役割を果たしている。本研究では、位相幾何学の立場からの研究を推進してきた。

### 曲面とシンプレクティック群の表現

一つのリーマン面が与えられると、そのヤコビ多様体と呼ばれる多様体が定まる。そして正則１形式達をリーマン面上に選んだ基点から積分することにより、ヤコビ多様体へのアーベル・ヤコビの写像が構成される。ヤコビ多様体上には自然なシンプレクティック形式が定義されるが、これをアーベル・ヤコビの写像で引き戻してリーマン面上で積分すれば、リーマン面の基本的不変量としての種数が現れる。少し別の角度から言い換えると、向き付けられた閉曲面の１次元ホモロジー群は、交叉数形式によりシンプレクティック群の基本表現空間となる。そして、この表現空間を幾何学的に実現したものが、シンプレクティック多様体としてのヤコビ多様体ということになる。

このよく知られた事実を、さまざまな形で一般化することにより、曲面に関連する種々のモジュライ空間および３, ４次元多様体に関する特性類や不変量が得られる。

**曲面の写像類群　⇒　三つの拡大**

$\left\{\begin{array}{l}\textbf{算術的写像類群}\\ \textbf{自由群の自己同型群}\\ \textbf{ホモロジー的曲面束の成す群}\end{array}\right.$

リーマン面のモジュライ空間のオービフォールド基本群として、曲面の写像類群と呼ばれる群が登場する。この群を部分群として含む重要な群として、算術的写像類群、自由群の自己同型群、そしてホモロジーの意味での円周上の曲面束のホモロジー同境類のなす群等がある。これらの群の構造の研究においても、シンプレクティック群のさまざまな表現が現れる。例えば、基本表現の生成する多項式代数、テンソル代数および自由リー代数等である。これらの表現空間上のシンプレクティック不変なコホモロジー類を考えることにより、リーマン面やグラフのモジュライ空間、絶対ガロア群、ホモロジー３球面、さらには位相的および$C^{\infty}$級の４次元多様体等に関する、さまざまな特性類や不変量を構成することができる。現在共同研究者の協力を得つつ、これらの非自明性や期待される諸性質について研究を続けている。

# 山本昌宏

## 逆問題の数理と応用

私は逆問題の数理の研究と製造業に表れる逆問題の実用解法の開発に従事しています。ここで逆問題とは直接視ることができない対象を間接的な観測によって推定したり決定したりするような問題です。様々な問題を逆問題として捉えることができます。例えば地下埋蔵物を地表面での観測によって探る問題であるとか、鋼材などの製品の内部にできた疵を製品を壊さずに検知する非破壊検査や、医学診断などを挙げることができます。このようなわけで逆問題は工学、医学などの多くの分野で重要な問題です。それでは逆問題における数学の課題とは何でしょうか。逆問題においては知りたい対象から空間的にも時間的にも隔たった状態でしか間接的な情報を得ることができないことが普通で、そのようにフィルターがかかった観測データで逆問題の解である未知の対象を決めなくてはいけないわけですので、データが解を一通りに決めるかという「一意性」とデータに誤差が混入した場合に、解にどのような影響を与えるのかという「安定性」が数学の課題です。逆問題自体の特性を反映して、一意性・安定性の問題は難しく解析学などの数学の色々な分野の知識を動員して考えるべき奥深いものです。私は様々な逆問題の一意性・安定性を研究してきました。私が四半世紀前にこの研究を志したときと較べて「逆問題の数学」は世界的にも確立し、毎年多くの国際会議が開催されるだけでなく、逆問題固有の学会組織も充実してきました。

そのような学術的な研究の重要性はいうまでもないことですが、逆問題の起源が現実の問題であることからも、最近10年ほどは製造業に現れる逆問題の実用解法の開発とコスト削減などを目指した現場の問題の開発にも従事しています。特に新日本製鐵株式会社との共同研究では、これまで大学院生、ポスドクを発明人に含む多数の特許出願や実用化の成果を挙げています。逆問題が境界領域から表れることからも、他分野との連携も盛んであり、さらに「逆問題の数学」が世界的に確立している状況から、国際的なプロジェクトにも色々参加しています。私の周辺の大学院生も国際的・学際的な共同研究に参加しています。現場からの問題提起を受けて新たな数学の問題群を創生することもしばしばあり、数学と他分野の双方向的な連携を実践しています。その一例として環境問題の１つである地下の汚染物質の浸透に関して信頼性のある予知・防止の技術の確立を目指し、時間微分の階数が必ずしも１でないような異常拡散方程式によるモデル化と関連する逆問題の数学的な研究を院生だけでなく海外の数学者、工学者、産業界の研究者を巻きこんでＧＣＯＥ「数学新展開の研究教育拠点」の枠組みで展開し、すでにいくつかの数学的な成果を挙げました。

添付した図は私がベルリンのワイエルストラス応用解析・統計学研究所においてフォトン・レーザー・エンジニアリング社との共同研究で行った実用逆問題の数値計算と実験結果です。内部に穴が掘られているような鋼材の表面をレーザーによって焼入れを行う際に穴のある場所とそうでない場所で焼入れを一様に行うことが現場から求められた課題でした。図１は一様な焼入れを実現するために、温度の時間変化の関数が h(t) となるようにレーザーの強さ p(t) を決定する装置です。図２は制御なしにそのままレーザーによって焼入れしたもので、白い部分で示された穴の上がレーザーで加熱されすぎ、黒で示されたように焼入れの層が一様になっていませんが、図３では関連する逆問題を解いて決定したレーザーの強さによって焼入れしており、黒で示された焼入れ部分の厚みが図２と較べて一様になっています。図４はそのような一様な焼入れをした製品の写真です。上部で白く写っている部分が穴の位置によらない一様な焼入れで、１つの逆問題の解法が製造業からの要請を満たしたという事例です。

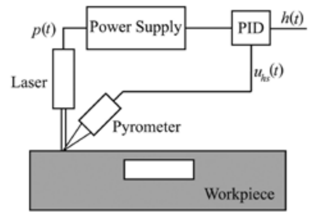



FIGURE 1. Pyrometer process control of laser surface hardening

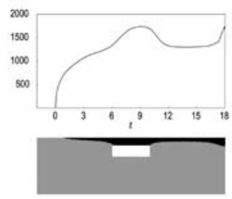



FIGURE 2. Uncontrolled case: Temperature in hot-spot of the laser beam (top) and resulting fraction of austenite (bottom).

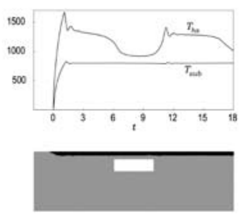



FIGURE 3. Controlled case: Temperature $T_{hs}$ in hot-spot of laser beam and $T_sub$ close to lower end of desired hardening depth (top). Resulting austenite fraction (bottom).

FIGURE 4. Result of a hardening experiment utilizing the computed temperature $T_{hs}$ as set-point for the machine-based control (Courtesy of Photon Laser Engineering, Berlin, Germany).

# 吉田朋広

## 確率過程に対する極限定理および統計推測理論の研究

ランダムな量$X$の確率的な構造は$X$の確率分布で表現することができますが、現実のデータの場合、その構造が完全に規定されることはほとんどありません。$X$の値域となる標本空間を$\mathcal{X}$とするとき、十分豊富と見なせる$\mathcal{X}$上の確率測度の族 $\mathcal{P}=\{P_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ を想定し、可能性のある未知の構造をパラメータ$\theta$で区別します。モデリングとは$\mathcal{P}$の構築であり、モデルのデータへの当てはめ（モデルの推定）とは写像 $\hat{\theta}:\mathcal{X}\to\Theta$ を決めることと言えます。

統計解析の方法は、観測 $x\in\mathcal{X}$ に対して何らかの決定 $\delta(x)\in\mathcal{D}$ をすることです。ここで$\mathcal{D}$は決定空間と呼ばれます。推定、検定、予測といった個々の問題に応じて空間$\mathcal{D}$は適宜設定されます。決定関数$\delta$の統計手法としての良さは、偶然得られた観測$x$によって評価するのではなく、その観測値が得られる頻度を考慮して総体的に測られるべきで、リスク関数$R(\theta,\delta)=\int W(\theta,\delta(x))P_\theta(dx)$で評価されます。$P_\theta$にまつわる計算が必要になることは言うまでもありませんが、最適な決定関数は$\mathcal{P}$全体の構造で決まり、決定関数の選択の仕方として$\mathcal{P}$に基づく方法（尤度解析）が重要になります。

統計科学は、データの持つ情報を抽出、加工し、現象の理解や予測を行うための方法論です。統計手法$\delta$の妥当性は、データが従う確率的な構造$P_\theta$およびその総体$\mathcal{P}$の構造に強く依存するため、統計理論の正しい発展のためには、確率論と数理統計学の両方の研究が必要となります。両分野の融合は、近年発達している確率過程の統計学において顕著で、確率統計学と呼ばれる新しい分野が形成されつつあります。確率過程の統計学の対象は諸科学に現れる多様な一般に非線形の時系列データです。そこでは$P_\theta$の陽表現も仮定できないため、その近似と誤差評価、さらに、非線形性による困難を解消するための漸近的方法の創出とその評価のために種々の極限定理が必要になり、理論統計学と確率論が協働する数学の場が現れます。例として確率微分方程式の統計解析では、$P_\theta$は偏微分方程式の解で表され、あるいはパス依存型の場合はより複雑にもなり、擬似尤度の構成が必要となります。擬似尤度解析に基づく決定関数の挙動を調べるためには確率過程の漸近挙動と汎関数の極限分布を捉えることが重要になります。

確率過程に対する従来の漸近理論を越えるために、混合ガウス型極限定理、セミマルチンゲールの汎関数に対する確率分布の安定的収束、高次の極限定理である漸近展開、確率空間の部分多様体上の極限定理および漸近展開など、新たな研究課題が統計推測の問題から必然的に現れます。その探求には漸近分布論を前提とし、セミマルチンゲールに対する確率解析学、パス空間やconfiguration space上のマリアバン解析が有用になります。確率統計学はこのように統計学の問題を解決するための数学的な枠組みを与えるもので、それを通して多くの実用的な公式が得られます。

統計学は、確率分布の近似に関して多くのスキルを有しています。統計学から出てきた漸近展開法がオプション価格の計算に役立ちました。いっぽう、近年の動向として、金融工学への応用から具体的な課題が示されています。確率微分方程式の推定は理論統計学に長い歴史がありますが、非同期的観測に基づく推測は実際の高頻度データに触発されて起きた課題です。数理統計学においては最後には厳密な数学による推測法の評価が課されますので、そのことがむしろ、統計量の探索において過去の例にとらわれない発想の自由を与えます。非同期データに対して現場で試みられた様々な方法がうまくゆかない状況で、非同期共分散推定量（HY 推定量）を直観に基づき提案し、そのパフォーマンスを理論的に明らかにしました。この推定法はいま応用の現場に還元されています。

$$\left|E\left[f(X_n)\right]-\int f(z)p_n(z)dz\right| \lesssim r_n^{-q'}P[\sigma_{M_n}<s_n]^{1/p}+o(r_n)$$

$$\begin{aligned}p_n(z) &= \phi(z)+\frac{1}{2}r_n\partial_z^2(E[\xi|Z=z]\phi(z))\\ &\quad -r_n\partial_z(E[\eta|Z=z]\phi(z))\end{aligned}$$

マルチンゲールの漸近展開

Math Sci
Univ Tokyo
Global COE Program

グローバルＣＯＥプログラム
「数学新展開の研究教育拠点」
(The Research and Training Center for New Development in Mathematics)
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/gcoe/index.html

連絡先：
東京大学大学院数理科学研究科
〒153-8914　目黒区駒場3-8-1
TEL: 03-5465-7001　　FAX: 03-5465-7011

発　　行：東京大学大学院数理科学研究科
デザイン：石原英介
印　　刷：清正堂加藤株式会社