解析的トーションとモジュラス空間上の保型形式

吉川　謙一

解析的トーションは位相幾何学における Reidemeister トーションの解析的類似として Ray-Singer により導入された閉 Riemann 多様体のスペクトル不変量です．de Rham 複体を Dolbeault 複体に置き換えることで解析的トーションの Kähler 多様体版が得られますが, この Kähler 多様体に対する正則解析的トーションがここで扱う解析的トーションです．具体的には以下の様に定義されます: M をコンパクト Kähler 多様体, E を M 上の正則 Hermite ベクトル束とし, E-値 $(0,q)$-形式に作用する Laplace 作用素のスペクトルゼータ関数を $\zeta_q(s)$ で表すとき,

$$\tau(M,E) = \exp[-\sum_{q\geq 0}(-1)^q\, q\, \zeta_q'(0)].$$

一次元の場合は, 正則解析的トーションは Laplace 作用素の正規化された行列式です．

Ray-Singer は正則解析的トーションを導入した論文で一次元の場合に具体例を計算し, Dedekind η-関数や Selberg ゼータ関数の特殊値が正則解析的トーションとして現れる事を見出しました．Ray-Singer やそれに続く初期の結果は, ある意味で正則解析的トーションを計算するのにスペクトルゼータ関数を直接計算することにより得られたものです．しかし, 直接計算で値を計算するという方法は考えている多様体がよほど良い場合（例えば局所対称空間など）でなければ, 高次元では機能しません．スペクトルゼータ関数を計算する事が一般に不可能だからです．

Ray-Singer による正則解析的トーションの導入以降, この方面の最初の大きな飛躍が Quillen によりもたらされました．Quillen は正則解析的トーションがコホモロジーの行列式 $\det H^\bullet(M,E)$ 上の自然な Hermite 計量であることを発見し, それ故にこの Hermite 計量は Quillen 計量と呼ばれます．Hodge の定理を経由することにより $\det H^\bullet(M,E)$ 上には調和形式の積分を通して L^2 計量が誘導されますが, この L^2 計量は多様体やベクトル束の変形に対して一般に連続に依存しません．「L^2 計量に正則解析的トーションを掛けて得られる Quillen 計量は, 多様体やベクトル束の変形に対して連続に依存する」というのが Quillen の発見です．

自然な計量が与えられたとき, 微分幾何学の最も基本的な問題はその曲率を決定することです．この問題は Bismut-Gillet-Soulé により解決されました:

定理 (Bismut-Gillet-Soulé) コンパクト Kähler 多様体の正則族 $\pi\colon X \to S$ と X 上の正則 Hermite ベクトル束 ξ が与えられた時, $\det R^\bullet\pi_*\xi$ 上の Quillen 計量の曲率は相対接束 TX/S の Todd 形式 $\mathrm{Td}(TX/S)$ と ξ の Chern 指標形式 $\mathrm{ch}(\xi)$ を用いてファイバー積分 $\pi_*[\mathrm{Td}(TX/S)\mathrm{ch}(\xi)]$ の $(1,1)$-部分として与えられる．

Quillen 計量は Grothendieck-Riemann-Roch 定理を（次数 1 の部分において）微分形式のレベルで実現する計量であり, この意味でも自然な計量であることが納得されると思います．その後, 正則解析的トーションと Quillen 計量の理論は Bismut の手により急速に発展を遂げ, Arakelov 幾何学における Riemann-Roch の定理や Lefschetz の定理へと進化しました．

以上, 正則解析的トーションから Quillen 計量, Bismut の理論へと続く研究の歴史を簡単に見ましたが, この一般論を「良い多様体」に適用して最初に少し触れた Ray-Singer の結果を高次元化することはできないでしょうか? 以下, この問に対して私が得た結果の一部を紹介します.

楕円曲線の高次元化として最初に誰もが考えるのは Abel 多様体ですが, 平坦 Kähler 計量に関する Abel 多様体の正則解析的トーションは恒に 1 で, Dedekind エータ関数のような面白い関数をモジュラス空間上で与えません. コホモロジーの行列式という観点から見ると, 楕円曲線の高次元化としてより自然な対象は Abel 多様体のテータ因子です.

定理 1 主偏極 Abel 多様体のテータ因子の正則解析的トーションは判別式軌跡を特徴付ける Siegel モジュラー形式の Petersson ノルムで与えられる.

それでは他の Ricci-平坦多様体の系列に対して, 正則解析的トーションはどう表されるでしょうか? Abel 多様体の次に思い浮かぶのは $K3$ 曲面ですが, $K3$ 曲面の Ricci-平坦 Kähler 計量に関する正則解析的トーションも Abel 多様体の場合と同じく恒に 1 です. 二次元には Enriques 曲面という別の Ricci-平坦多様体が存在します. 幸運な事に 90 年代中頃, Borcherds が Enriques 曲面のモジュラス空間上で判別式軌跡を特徴付ける保型形式を構成しました. この保型形式は現在 Borcherds Φ-関数と呼ばれており, あるフェイクモンスター Lie 代数の分母関数として構成されます.

定理 2 Enriques 曲面の Ricci 平坦 Kähler 計量に関する正則解析的トーションは 10 次元 Borcherds Φ-関数の Petersson ノルムで与えられる.

Enriques 曲面を対合を持つ $K3$ 曲面に置き換え, 解析的トーションを対合に関する同変解析的トーションに置き換えれば, 上述の定理 2 の類似が成立します. 多くの例で, 対合付き $K3$ 曲面の同変解析的トーションは Borcherds Φ-関数に類似した無限積展開を持つ保型形式の Petersson ノルムで与えられます.

それでは, 三次元の Calabi-Yau 多様体に対して正則解析的トーションはモジュラス空間上でどのような関数でしょうか? Bershadsky-Cecotti-大栗-Vafa はこの関数がミラー Calabi-Yau 多様体の楕円的 Gromov-Witten ポテンシャルと（ミラー変換による同一視の下で）等価であると予想しています. 最近 $\mathbf{P}^4$ の 5 次超曲面の楕円的 Gromov-Witten ポテンシャルが Zinger により計算され, ミラー 5 次超曲面の正則解析的トーションの計算結果 (Fang-Lu-Y) と比較して, Bershadsky-Cecotti-大栗-Vafa の予想がこの場合に確認されました.

Ricci-平坦でない高次元多様体の場合に正則解析的トーションが計算されている例は, 射影空間（Gillet-Soulé）, コンパクト対称 Hermite 空間（Köhler）, Hirzebruch 曲面（Mourougane）などがあります.