# 特性類とシンプレクティック群の表現

森田　茂之（日本数学会 2007 年度幾何学賞受賞）

これまで葉層構造，曲面バンドル，リーマン面やグラフのモジュライ空間，３次元多様体等，さまざまな幾何構造に関する特性類の理論を研究してきた．最近はこれらに加えて，シンプレクティック多様体のシンプレクティック微分同相群の特性類の研究を、D. Kotschick 氏と共に始めた．ここでは，これらの特性類の理論を，シンプレクティック群の表現の観点からごく簡単に紹介したい．

一つのリーマン面が与えられると，そのヤコビ多様体と呼ばれる多様体が定まる．そして正則１形式達をリーマン面上に選んだ基点から積分することにより，ヤコビ多様体へのアーベル・ヤコビの写像が構成される．ヤコビ多様体上には自然なシンプレクティック形式が定義されるが，これをアーベル・ヤコビの写像で引き戻してリーマン面上で積分すれば，リーマン面の基本的不変量と しての種数が現れる．

少し別の角度から見ればつぎのようにもいえる．向き付けられた閉曲面の１次 元ホモロジー群は，交叉形式によりシンプレクティック群の基本表現空間となる．そして，この表現空間を幾何的に実現したものが，シンプレクティック多様体としてのヤコビ多様体ということになる．

このよく知られた事実を，さまざまな形で一般化することにより，上記の種々の幾何構造に関する特性類が得られる．たとえば，曲面バンドルあるいはリーマン面のモジュライ空間の場合には，基本表現空間の３次の外積が現れる．具体的には，モジュライ空間のオービフォールド基本群として曲面の写像類群が登場するが，その重要な部分群であるトレリ群のアーベル化として現れる(D. Johnson の基本的結果)．この表現を幾何的に実現すれば，シンプレクティック構造をもつある高次元のトーラスとなる．このトーラスのシンプレクティック不変なコホモロジー類達をモジュライ空間に引き戻せば，モジュライ空間の 特性類全体のなす tautological 代数となる（河澄響矢氏との共同研究）．

写像類群を部分群として含む重要な群として，自由群の自己同型群，算術的写像類群，そしてホモロジーの意味で拡張された曲面バンドルのモノドロミー全体のなす群（Garoufalidis-Levine による)等がある．これらの群の構造の研究においても，シンプレクティック群のさまざまな表現が現れる．とくに重要なものは，基本表現の生成する自由リ

一代数である．また，シンプレクティッ ク多様体としての偶数次元ユークリッド空間において，形式的ハミルト ン・ベクトル場全体のなすリー代数は，シンプレクティック表現としては，基本表 現の生成する定数項のない形式的べき級数環となる．これらの種々の表現空間上のシンプレクティック不変なコホモロジー類を考えることにより，さまざまな特性類や不変量を構成することができるのである．とくに，グラフのモジュ ライ空間，絶対ガロア群，ホモロジー 3 球面のホモロジー同境類のなす群，ハミルトン・ベクトル場の Gel'fand-Fuks コホモロジー群等の重要な空間や群に関する特性類や不変量（あるいはその候補）が構成できる．現在、このようにして得られた特性類や不変量について、その非自明性や期待される諸性質について引き続き研究を続けている．

これまで先輩・友人や若い人達との交流を通して多くの恩恵に浴してきた．この場を借りて心からの感謝の気持ちを申し述べたい．