大規模相互作用系の確率解析

舟 木 直 久

流体の運動など，物理現象における時間発展の法則は，一般に非線形偏微分方程式によって記述される．そのような物理現象の背後には，原子・分子等によって構成されるミクロ (微視的) な世界がある．それは巨大な自由度を持つ集合体であり，互いにきわめて複雑な相互作用をしながら時間的に変化する系である．これを大規模相互作用系という．マクロ (巨視的) な観測量に対する諸法則をミクロなレベルの運動法則から説明することは，統計物理とよばれる分野の目標であり，それに数学的な基礎付けを与えることは，確率論の重要なテーマの一つである．

筆者は，確率解析に基づく大規模相互作用系の研究，特にミクロとマクロを繋ぐスケール極限，最近は主として相分離と界面の形成に関わる問題に焦点を絞って考察を行っている．確率解析は伊藤清により創始され，その発展には日本人研究者たちの貢献も大きい．また，大規模相互作用系に対するスケール極限は流体力学極限とよばれ，その解析には Varadhan のエントロピー法が基本的手法として用いられる．物理的な系を十分低温で観測すれば，通常 2 つ以上の相（例えば水と氷）が共存する状態が生ずる．初期時刻で異なる相が共存していれば，それらを分離する境界面（界面という）が現れ，それは時間とともに変化していく．その時間発展の法則をミクロな系に対するスケール極限，特に流体力学極限の観点から考察することが研究目標の一つである．

流体力学極限とその基本原理である局所エルゴード性について簡単に説明しておきたい．原子の大きさ (約 $10^{-10}m$) とマクロなレベルの長さ ($1cm$) の比は，$\varepsilon = 10^{-8}$ 程度であるから，ミクロな系に対して，空間スケールを ε 倍に縮小する変換を施すことによって，マクロな世界の描像に移ることが可能になる（逆に，マクロからミクロな世界を覗くには ε^{-1} 倍の顕微鏡が必要である）．ちなみに，体積比 ε^{-3} は Avogadro 数 6×10^{23} に匹敵する大きさである．ミクロからマクロな世界に移るには，空間のスケール変換と同時に時間のスケール変換も必要である．このような時空のスケール変換において $\varepsilon \downarrow 0$ とする極限操作を行い，特に局所的なエルゴード性に基づく平均化を経由して，大規模相互作用系から非線形偏微分方程式等を導く過程を標語的に流体力学極限という．一般にミクロな系を考えるとき，マクロに短い時間であっても，それはミクロなスケールにおいては非常に長い時間である．したがってミクロな系はある種の平衡状態に到達すると予想される．しかし，ミクロな系の平衡状態は通常，一意ではない．その結果，マクロな時空の点ごとにその周辺のミクロな系を観察すれば，異なる平衡状態が現れると考えられる．これが局所平衡状態とよばれるものである．長時間にわたることに起因する平均化を局所エルゴード性という．流体力学極限の背後には，各点ごとに配置された平衡状態が連続的に連なり，それらが互いに影響を及ぼしながらそれぞれ平均化を起こし

ていくという描像がある．

筆者は，このような描像に基づき，Stefan 問題の導出を行った．2 種類 (例えば水と氷の分子) のタイプの粒子からなる系があり，それぞれ異なる飛躍率を持つ川崎力学（排他律を持つランダムウォーク）をし，異種粒子が衝突すると消滅（あるいは反射）するというモデルを考える．これらのモデルに対して拡散型スケール極限を経て，1 相あるいは 2 相 Stefan 自由境界問題を導くことができる．また，相互作用 Brown 粒子系の低温極限を論じた．極限操作の下で粒子系はミクロには，一定間隔で配置される堅牢な格子結晶構造を形成する．さらに，そのような結晶構造のマクロな運動を特徴付けることができる．この問題は，相共存と相分離の下で現れる界面，いわゆる Wulff 図形の運動について，特に温度が 0 に十分近いという状況の下で考察したものである．1 次元では 2 つ以上の結晶構造の合体についても証明を与えた．

ミクロなレベルの界面が最初から設定されているモデルとして $\nabla\varphi$ 界面モデルとよばれるものがある．筆者は，その静的理論：弱い自己ポテンシャルを持つ $\nabla\varphi$ 界面モデルの Gibbs 分布に対する大偏差原理と自由境界問題の導出，弱いピンニングを持つ Gauss 的ランダムウォークのスケール極限（大偏差原理の精密化）および動的理論：対応する時間発展を記述する Ginzburg-Landau $\nabla\varphi$ 界面モデルの流体力学極限と異方的平均曲率運動の導出，動的大偏差原理，壁上の界面モデルからの発展的変分不等式（障害物を持つ非線形偏微分方程式）の導出，壁上の平衡揺動と反射を持つ確率偏微分方程式の導出などを行った．

関連して，相関不等式とモーメント不等式の確率力学的証明，2 曲線の間のパス空間における部分積分公式，Bessel 過程とその変形に関する Wiener 型確率積分，確率偏微分方程式に対する特異極限と相分離，分数冪 Laplacian を持つ Burgers 方程式などに関する研究を行った．[1] は $\nabla\varphi$ 界面モデルに関する総合報告，[2] は大規模相互作用系の確率解析，特に相分離と界面の形成に関わる研究に焦点を絞って最近の研究成果を概観したものである．

References

[1] T. Funaki, *Stochastic Interface Models*, Lectures on Probability Theory and Statistics, Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour XXXIII - 2003 (ed. J. Picard), 103–274, Lect. Notes Math., **1869** (2005), Springer.

[2] 舟木直久, 大規模相互作用系の確率解析, 数学, **60** (2008)，出版予定.