第７回「数学の魅力」

いろいろな次元の球

ー　次元が変わるとなにかが変わる　ー

東京大学 大学院 数理科学研究科　金井雅彦

２０１８年3月１１日

数学界におけるこの四半世紀の重大ニュース

フェルマーの「最終定理」(1630頃),
ワイルズにより証明される (1994).

$$x^n + y^n = z^n \qquad (n \geq 3)$$

サーストンの幾何学化予想 (1982) を**ペレルマン**が肯定的に解決 (2003). その系として, **ポアンカレ予想** (1904) が従う.

ケプラー予想 (1600頃) を**ヘイルズ**が肯定的に解決 (1998).

ハリオット
~~ケプラー~~予想とは？

これより密にボールを積む方法はないだろう.

最密充填問題・パッキング問題

16世紀末，ハリオットが問題提起

1611年，ケプラー『六角形の雪について』を記す.

ヨハネス・ケプラー
1571年 - 1630年

トーマス・ハリオット
1560年頃 - 1621年

脱線：ハリオットの定理

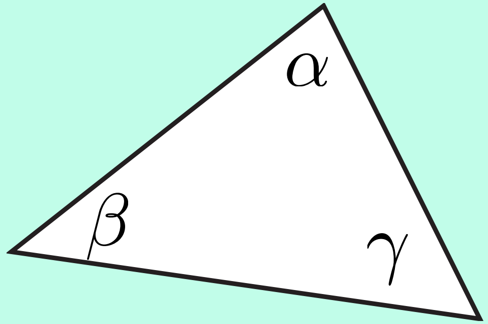
単位球面では？

半径の長さが１の

$$(\alpha + \beta + \gamma) - \pi = A$$

球面３角形の面積

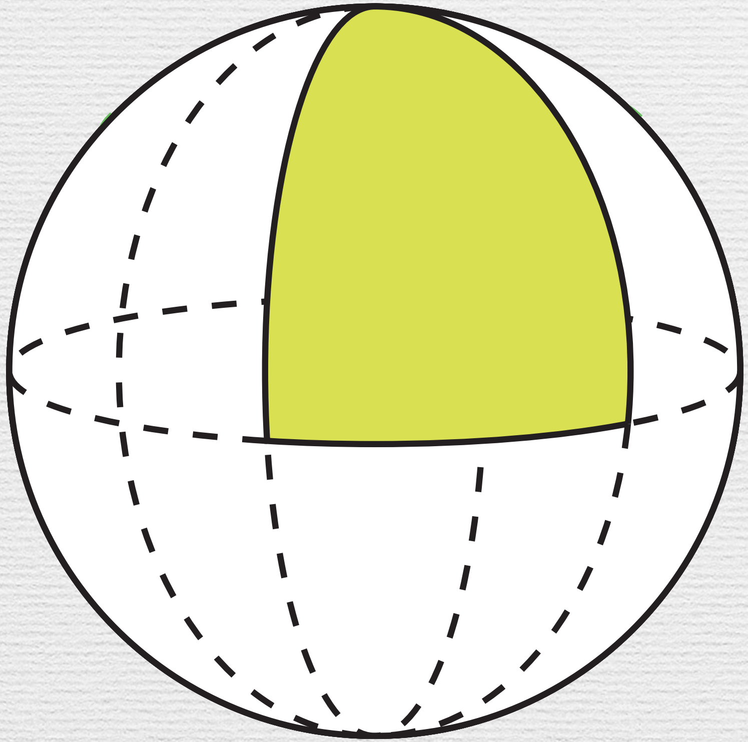
復習：平面においては



$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

$= 180^\circ$

円周率（パイ）
$= 3.14\cdots$

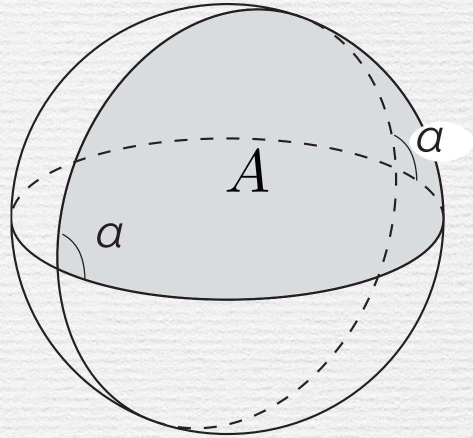


球面３角形＝３つの大円で囲まれた図形

大円の例：赤道・経線

$$\alpha + \beta + \gamma > \pi$$

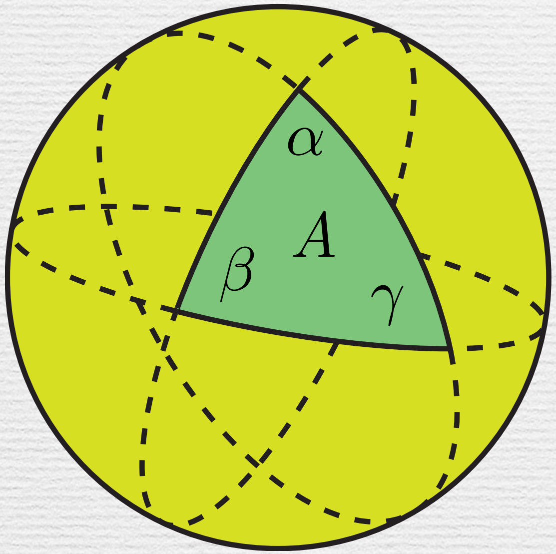
証明　２角形の場合（準備として）

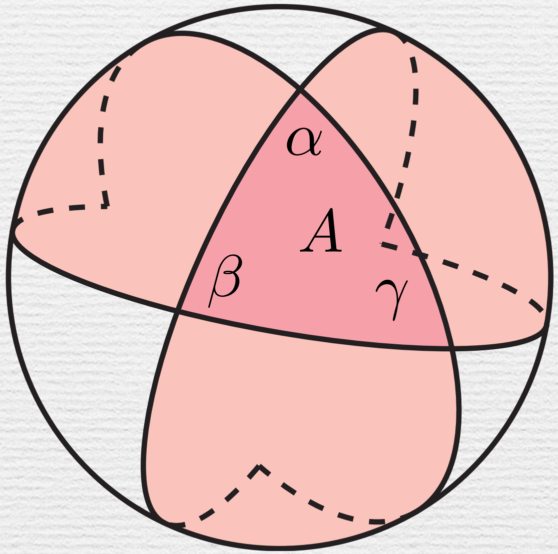


$$A = (\text{球面の面積}) \times \frac{\alpha}{2\pi} = 2\alpha$$

$= 4\pi$

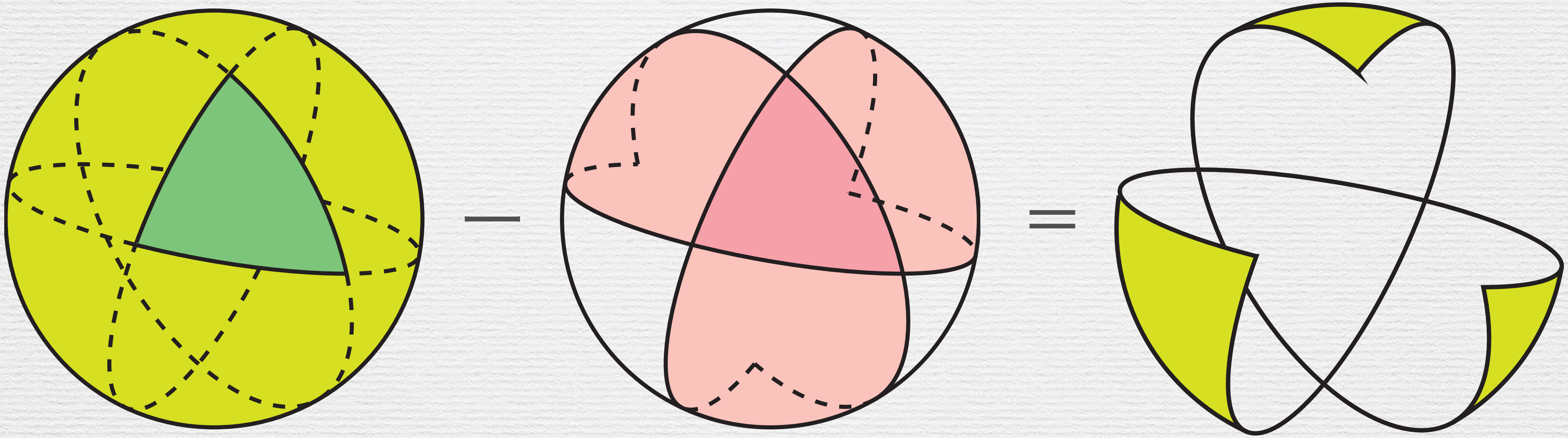
３角形の場合





花型

$$\begin{aligned}(\text{花型の面積}) &= 2\alpha + 2\beta + 2\gamma - 2A \\ &= 2(\alpha + \beta + \gamma - A)\end{aligned}$$



$$（\text{花型の面積}）\quad = 2(\alpha + \beta + \gamma - A)$$

$$= （\text{球面の面積}）\times \frac{1}{2} = 2\pi$$

ゆえに　$\alpha + \beta + \gamma - A = \pi$

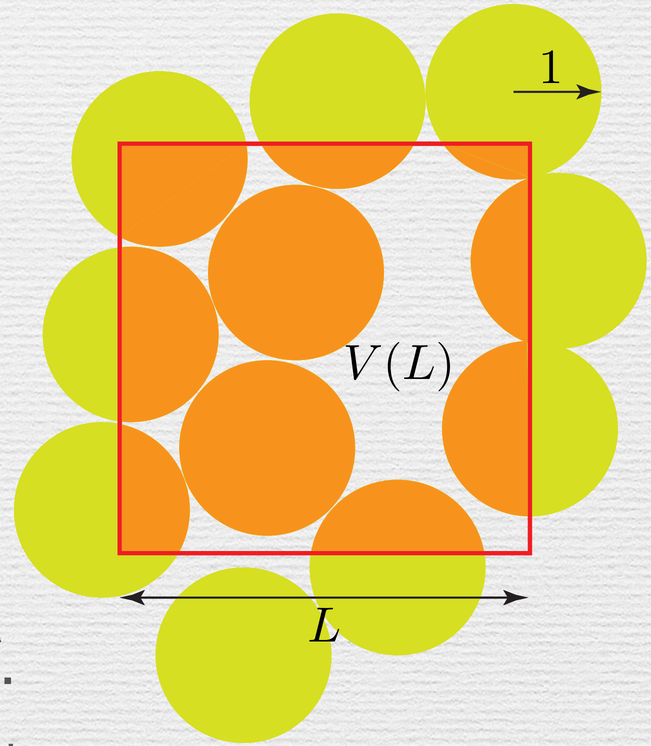
（証明終わり）

ハリオット予想：これより密にボールを積む方法はない.

数学的定式化 空間内に半径１のボールが（互いに重なりなく）配置されているとする.

同じ空間内に1辺の長さが **L** の立方体をとる.

その中に「入っている」ボールの体積の総和を **V(L)** とする．すると，その立方体の中のボールの密度は，**$d(L)=V(L)/L^3$** である.



$L \to \infty$　のときの $d(L)$の極限 **d** を**充填率**と呼ぶ.

とくに「キャノンボール充填」の充填率を **d_0** とする.

ハリオット予想：　**$d \leqq d_0$**

ハリオット予想，解決の前後

ジョン・ミルナーの苛立ち（ 1970年代？）：「正しい答えと見られるものがガウスの時代から知られていることを思えば，これは実に恥ずべき状況だ」「欠けているのは証明だけである」

トーマス・ヘイルズ（1998年）：ケプラー予想の解決を宣言

（一部はファーガソンによる）

ガボル・フェイエッシュ・トートなどの査読者たち：「（ヘイルズの証明に対し）それが正しいことは99パーセントまで確信できたが，完全なる確信には到達できなかった」

イアン・スチュアート：「**フェルマーの最終定理**に対するワイルズの証明は**『戦争と平和』**のようなものであり，**ハリオット予想**に対するヘイルズの証明は**電話帳**のようなものである」

トーマス・ヘイルズ他（2014年）：証明支援プログラムを用いた証明が完成する.

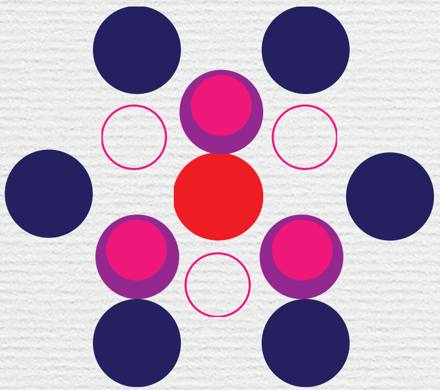
キッシング問題

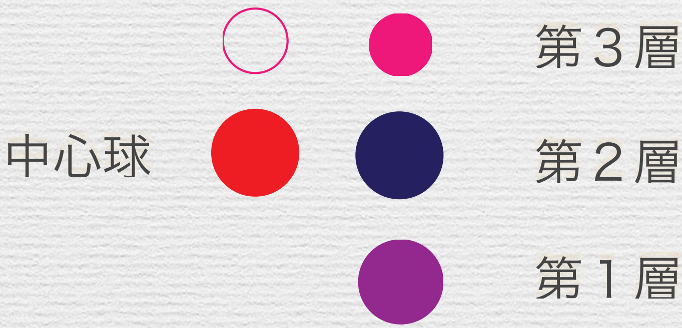
ひとつのボール（これを中心球と呼ぼう）に最大何個のボールが（互いに重なることなく）接触できるか？

12個接触させることは容易

12個か，それとも**13個**か？

（**ニュートン ＝ グレゴリー論争**；1694年）





（キッシング数）＝１２，それとも１３？

難しさの比較：

（ハリオット予想）＞（キッシング問題）

キッシング問題の解決

1954年：シュッテ - ファン・デル・ヴェルデン

（3次元キッシング数）＝ 12

1956年：リーチ，キッシング定理の

別証明を与える

球面グラフ

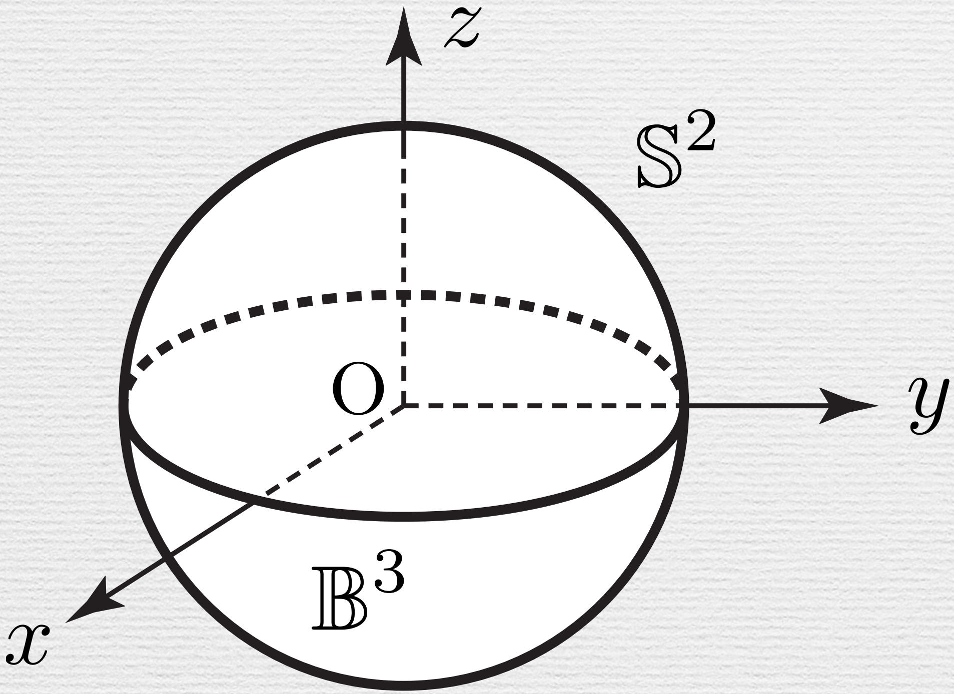
オイラーの公式

（頂点の個数）－（辺の個数）＋（面の個数）＝2

いろいろな次元の球

$$\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$ ２次元球面

$$\mathbb{B}^3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$ ３次元球体



$(x,y,z) \in \mathbb{S}^2$

$\Updownarrow$

O と (x,y,z) の間の距離が 1

$= \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\Updownarrow$

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$$\mathbb{S}^n = \{(x_0,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$$ n次元球面

$$\mathbb{B}^{n+1} = \{(x_0,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_0^2 + \cdots + x_n \leq 1\}$$ n+1次元球体

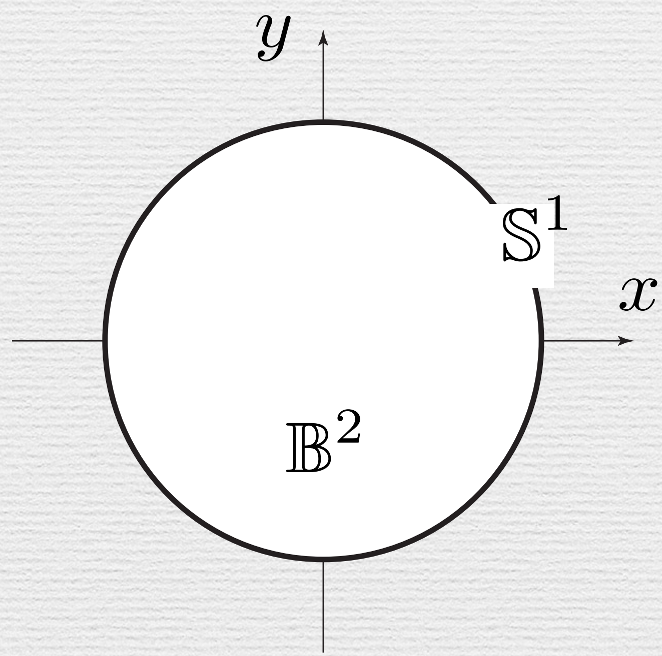
$$\mathbb{S}^n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$$ n次元球面

$$\mathbb{B}^{n+1} = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_0^2 + \cdots + x_n \leq 1\}$$ n+1次元球体

$$n = 1$$

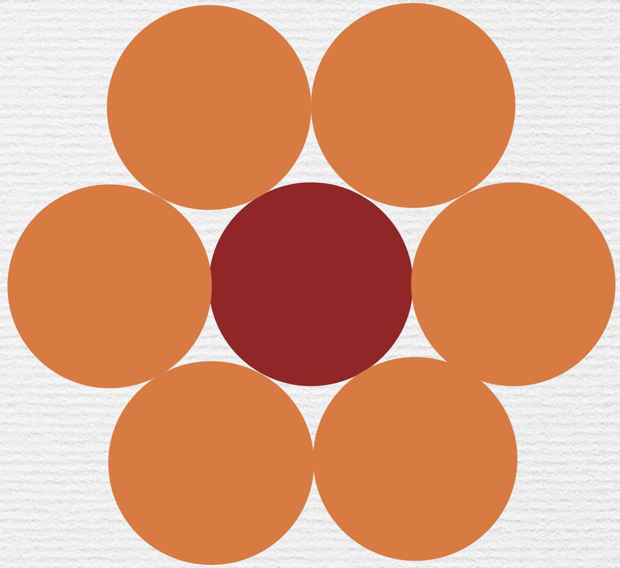
$$\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$ 円周＝１次元球面

$$\mathbb{B}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$ 円板＝２次元球体

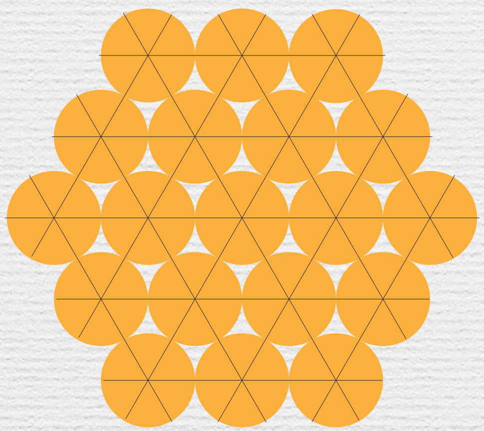


２次元キッシング問題

同じ大きさの円板を多数用意する．ひとつの円板を選びその円板に他の円板を重なりを持たないよう接触させる．最大何個の円板を接触せることができるか．　**答 ー ６個**

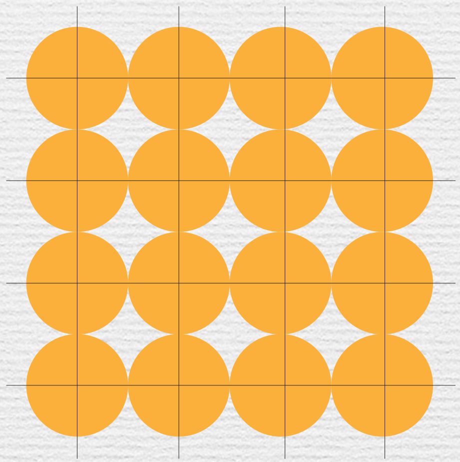


2次元パッキング問題



充填率

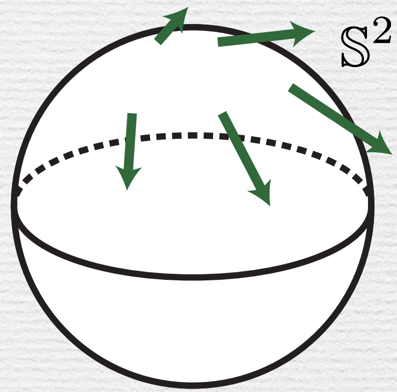
>



2次元ハリオット予想：六方配置が「唯一」の最密充填であろう．

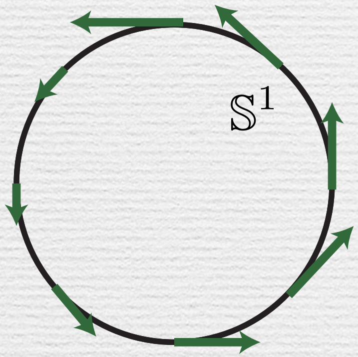
1940年，トートが2次元ハリオット予想を肯定的に解決．

次元によって現象が異なる



例：**ポアンカレ＝ホップの定理**

偶数次元の球面上の連続な接ベクトル場はゼロ点を有する.



事実：**奇数次元**の球面には，連続な接ベクトル場でゼロ点を持たないものが存在する.

ポアンカレ予想： n 次元の「図形」M が条件「．．．．」を満たすならば，M は n 次元球面と「同じ」である.

n = 2: 初等的

n ≧ 5: スメール (1960)

n = 4: フリードマン (1980)

n = 3: ペレルマン (2003)

次元によって手法が異なる！

一般次元におけるキッシング数 k

1次元　k = 2

2次元　k = 6

3次元　k = 12

4次元　k = 24（ムスナー；2003)

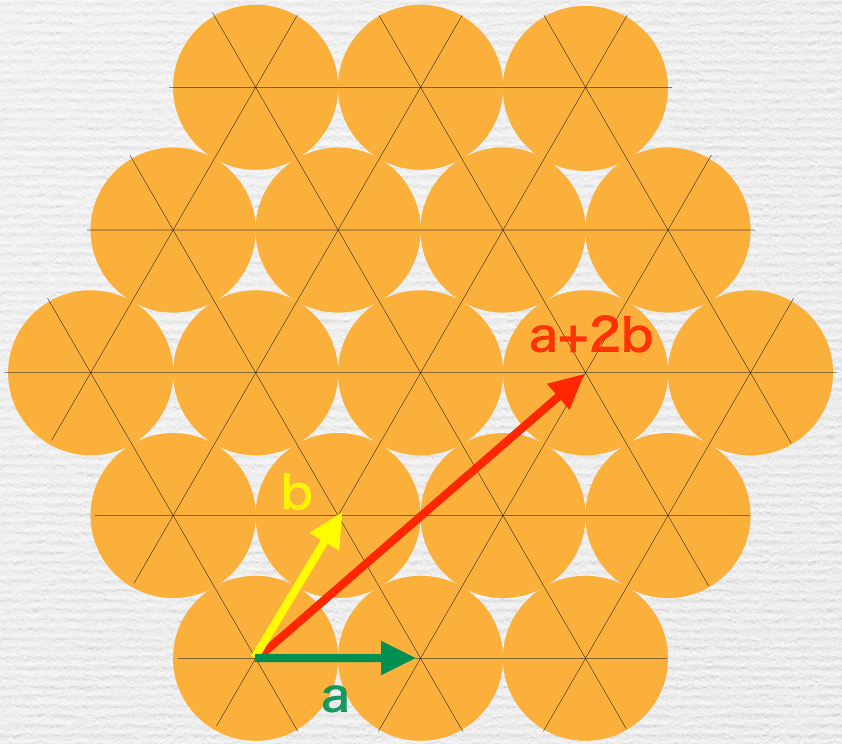
5次元　40 ≦ k ≦ 46

6次元　72 ≦ k ≦ 82

7次元　126 ≦ k ≦ 140

8次元　k = 240（1970年代)

２４次元　k = 196560（1970年代)



格子型充填

注意： 1, 2, 3, 4, 8, 24次元においては

$k_{lattice} = k$

９次元　$k_{lattice} = 272$

$k \geqq 306$

1) 自然界は「最小」ないし「最大」を好む（変分原理)

2)「最大」ないし「最小」なものは「対称性」が高い

※ 9次元においては 2) が破綻 !!

一般次元におけるパッキング問題

1次元・2次元・3次元のパッキング問題は2000年ごろまでに解決済み

2016 年 3 月 14 日　マリナ・ビアゾフスカが
8次元パッキング問題を解決 !!　　⇐　E_8 格子

2016 年 3 月 21 日　ビアゾフスカ他4名が
24次元パッキング問題を解決.　⇐　リーチ格子

マリナ・ビアゾフスカ
1984 年生れ

これらの格子は神出鬼没　・・・

符号理論　　有限単純群　　リー環論

4次元トポロジー　　K3曲面　　保型関数論　　解析数論

マリナ・ビアゾフスカから皆さんへのメッセージ

数学は全宇宙です．宇宙を解明するための新しい手段が次々と見いだされるこの時代をわたし達は大きな興奮とともに生きています．皆さんが将来新たな発見に至ることをわたしは心から願っています．（拙訳）

ハリオット予想に関する参考文献

ジョージ・スピーロ著・青木薫訳「ケプラー予想 ー 四百年の難問が解けるまで」新潮社

Thomas C. Hales, “Cannonballs and honeycombs”, Notices Amer. Math. Soc. 47 (2000), 440--449.

Thomas C. Hales, “Historical overview of the Kepler conjecture”, Discrete Comput. Geom., 36 (2006), 5–20.

Bill Casselman, "The difficulties of kissing in three dimensions", Notices Amer. Math. Soc., 51 (2004), 884--885.

Florian Pfender and Günter M. Ziegler, "Kissing numbers, sphere packings, and some unexpected proofs", Notices Amer. Math. Soc., 51 (2004), no. 8, 873–883.

David de Laat and Frank Vallentin, “A breakthrough in sphere packing: the search for magic functions”, Nieuw Archief voor Wiskunde, Sept., 2016, 184 - 192.

Henry Cohn, “A conceptual breakthrough in sphere packing”, Notices Amer. Math. Soc., 64 (2017), no. 2, 102 - 115.