

銀行における確率論の応用

—安心して下さい、
ちゃんと世の役にたっていますよ—

三菱UFJフィナンシャルグループ
/東京大学大学院数理科学研究科客員教授
長山いづみ



目次

● はじめに

- 自己紹介
- 銀行のしくみ

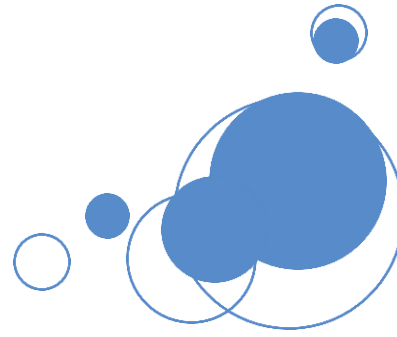
● 準備

- 期待値とは
- 宝くじの値段と当選金の期待値

● 銀行における確率論の応用

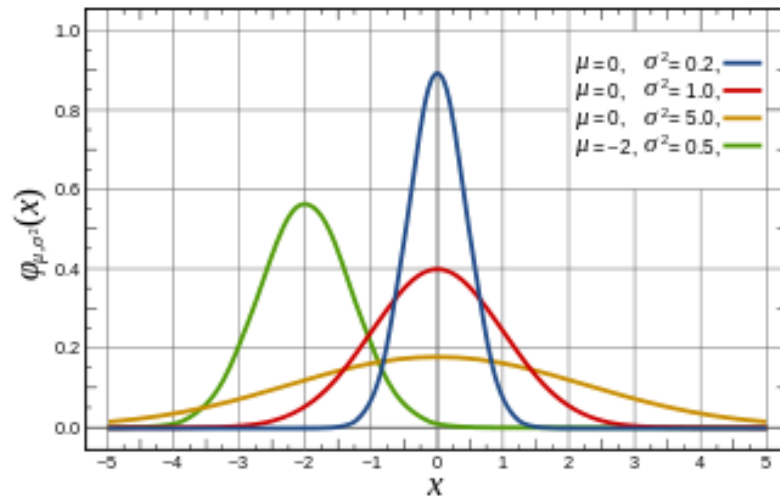
- 問題設定(アメリカ旅行、円をドルに、オプションの話)
- オプションの価値、別の確率を使うと見えてくる

はじめに



□ 自己紹介

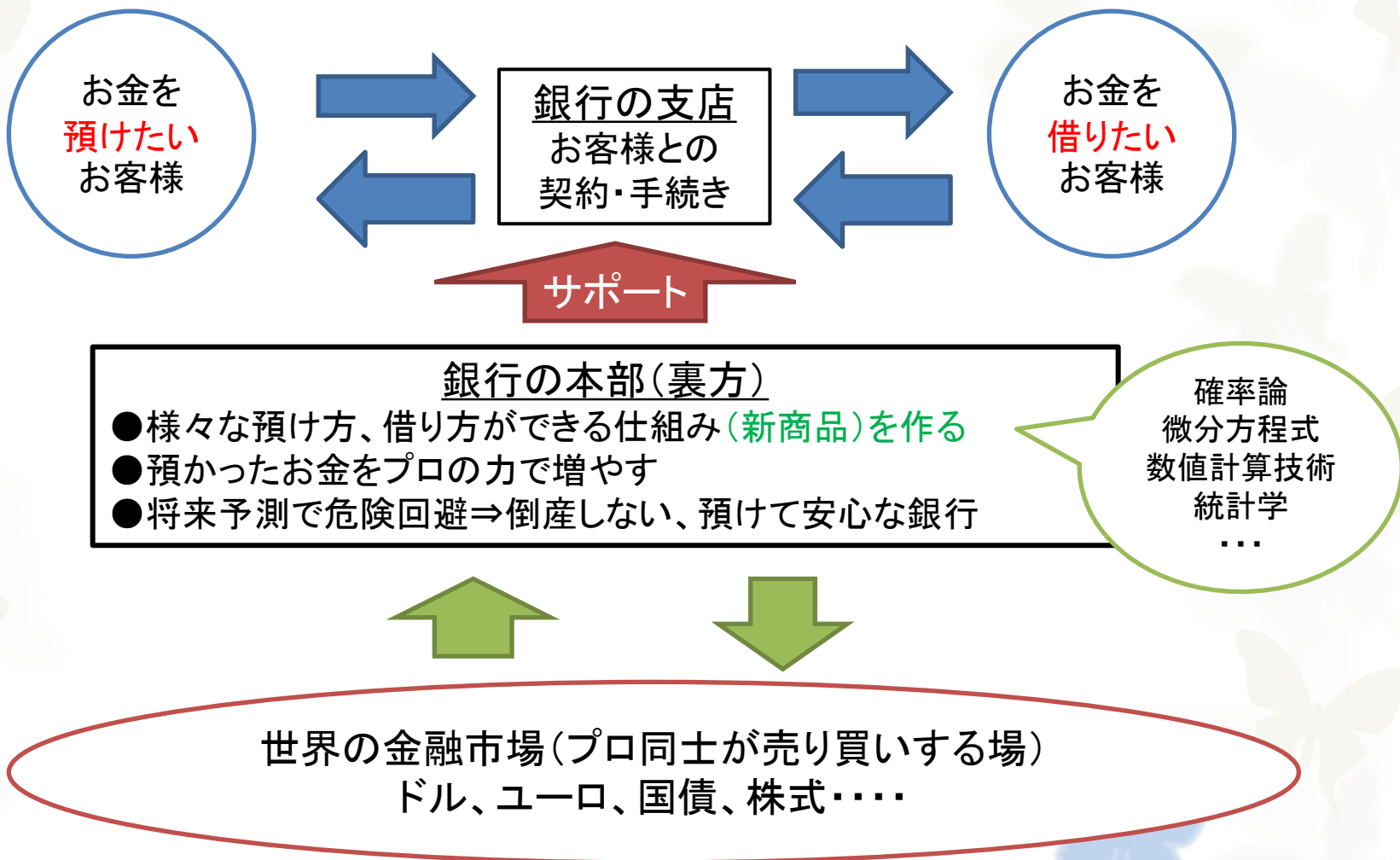
□ 銀行のしくみ



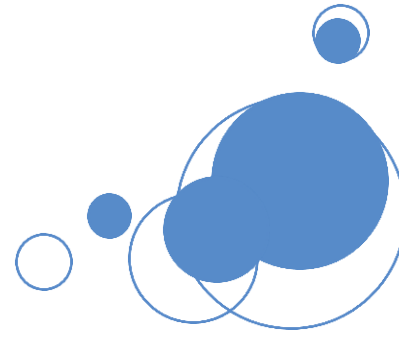
自己紹介

- 高校1年秋 正々堂々、学校をサボって京大学園祭へ行き、
広中平祐先生の講演に、感銘を受ける。
- 大学4年 代数幾何専攻 大学院目指す
- 卒業 魔が刺してコンピュータメーカーに就職(22歳)
- 1990年 三菱銀行に転職(28歳)
- 1993年～ 働きながら大学院で勉強(確率解析との出会い)
(復活をもくろみ、人生の軌道修正)
- 2000年 一橋大学大学院(夜間社会人大学院)に転職(38歳)
- 2007年 三菱東京UFJ銀行に出戻り現在に至る

銀行のしくみ



準備



- 期待値とは
- 宝くじの値段と
当選金の期待値



期待値とは

● サイコロの目(1から6)の平均

$$\begin{aligned}\text{目の平均} &= \frac{\text{各目の合計}}{\text{目の種類の数}} \\ &= \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3.5 \\ &= 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} \\ &= (\text{目の数} \times \text{その目の出る確率}) \text{の合計}\end{aligned}$$

- この**平均値**のことを、これから振るサイコロの、平均的に期待される目の値という意味で、**期待値**とも言います。

宝くじの値段と当選金の期待値

- 1枚300円の宝くじ1000万枚が売られ、当選金が以下の通りとしよう。
 - 1等 1枚 当選金 5億円、 当選確率1000万分の1
 - 2等 100万枚 当選金 300円、 当選確率 10分の1
 - はずれ 残り 当選金 0円
- 当選金の期待値(宝くじ1枚当たりの平均の当選金額)
=5億円 × (1/1000万) + 300円 × (1/10)
=50円 + 30円
=80円 << 300円
期待値より売価が高くても売れる (^_^)

銀行における確率論の応用

□問題設定

□アメリカ旅行でクマを買おう！

□ドルの値段

□オプションとは

□銀行の裏方の作戦

□価格の原理

□別の確率を使うと見えてくる



(問題設定)ーアメリカへ行こう！ドル？ー

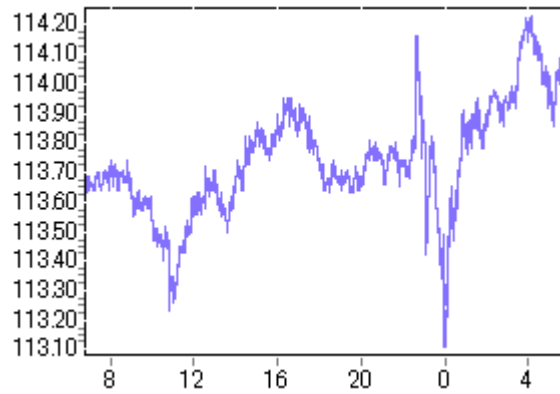


- 来年アメリカ旅行に。旅先で、を買うよ！
- 今、手元には、お小遣い1,000円しか無～い (>_<)
- 来年お正月にお年玉を、20,000円もらえる♪
- ぬいぐるみの値段は・・・200ドル・・・、えっ！ドル？
- どうすれば200ドルを手に入れられるの？
- 銀行でドルを買うことができます。
- 今なら、1ドル114円くらいですが、簡単のため今日は100円としましょう。



(問題設定)－1ドルの値段は変わる？－

- 1ドルの値段(為替レート)は時々刻々変化します。



- ある1日のドルの価格の変化(横軸は時刻、縦軸は1ドルの値段(円))
- 来年1月には、1ドル何円になるの？
- ⇒ 誰にもわかりません。

(問題設定)

ー来年の1ドルの確率モデルー

- 来年1月には、次の二つのどちらかが起こる。
 - 事象A : 1ドル = 110円 確率80%
 - 事象B : 1ドル = 90円 確率20%
- もし事象Aだったら、200ドル買うには22000円必要
⇒ 足りな〜い! (>_<)
- 今なら100円で買えるけど、今はまだ元手がない。
- 必ずお年玉で足りるように、今から手を打つ方法はないの？
- お父さんの提案・・・「オプション」があるよ。

（問題設定）－オプションって何？－

オプション

「来年1月に、1ドルを100円で買う**権利**」という意味の券
これを200枚（200ドル分）持っていれば・・・

- もし、来年1月に
 - （事象A）1ドル＝110円 になったら、
権利を使って2万円を200ドルに替える
 - （事象B）1ドル＝90円になったら、
権利を放棄して
普通に銀行の窓口で1万8千円で200ドルに替える

(問題設定)

ー要するに、オプションって何？ー

1ドル分について、
オプションありの場合と、なしの場合を比べてみよう

事象	来年の 1\$の値	来年1ドル買うのに必要な金額		オプション による利得
		オプションあり	オプションなし	
A	110円	100円	110円	10円
B	90円	90円	90円	0円

- 1ドル分のオプションを持っていると、
80%の確率で1ドル110円となり、10円の利得
20%の確率で1ドル 90円となり、損得なし
- どちらにしても、損はしない。10円得する可能性もゼロではない。
こんな都合の良い券が無料のわけがない。 **妥当な値段は？**

(問題設定)

ーオプションはどこで買えるの？ー

- 銀行や証券会社では、このオプションのような商品を販売しています。
 - 企業の原材料輸入担当者への大口の取引
 - 個人の預金、ローン契約に組み込み

- ちなみに、例題のオプションの利得額の期待値を求めてみよう。

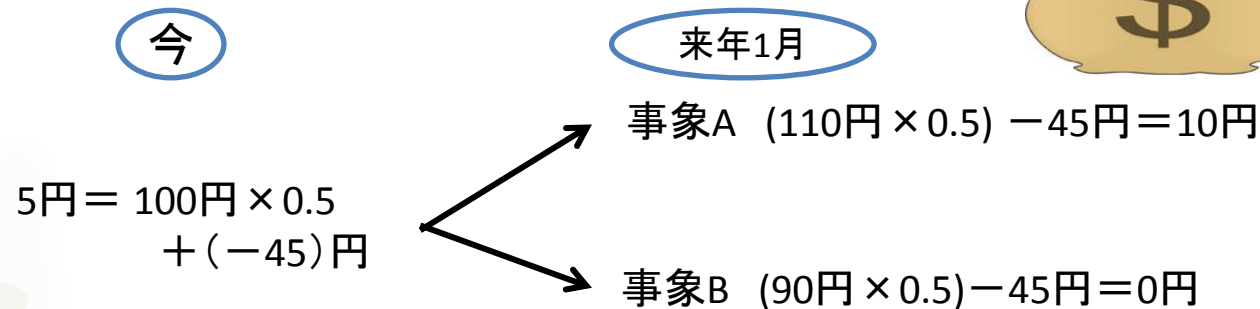
$80\% \times 10\text{円} + 20\% \times 0\text{円} = 8\text{円}$ （実際に起こる確率での期待値）

- 実は、妥当な値段は、なんと、5円なのです！
なぜ？期待値より安くても、銀行は損をしないの？

手元にある
1,000円で
買える！

銀行の裏方の作戦

- 銀行は、オプション(来年の1月に1ドルを100円で買う権利) 1ドル分につき、次の作戦を考えます。(銀行がオプションの売り手)
 - 5円でオプションを売り、45円を借金(来年返す)、合計50円で0.5ドル買う
 - 袋の中に0.5ドルと、借金証書を入れる
- 袋の中身の価値の変化



- 来年1月、事象A,Bともに、袋の中身とオプション利得は一致！
- 銀行は、オプションを5円で売り、来年買い手に袋を渡せば、問題なし。

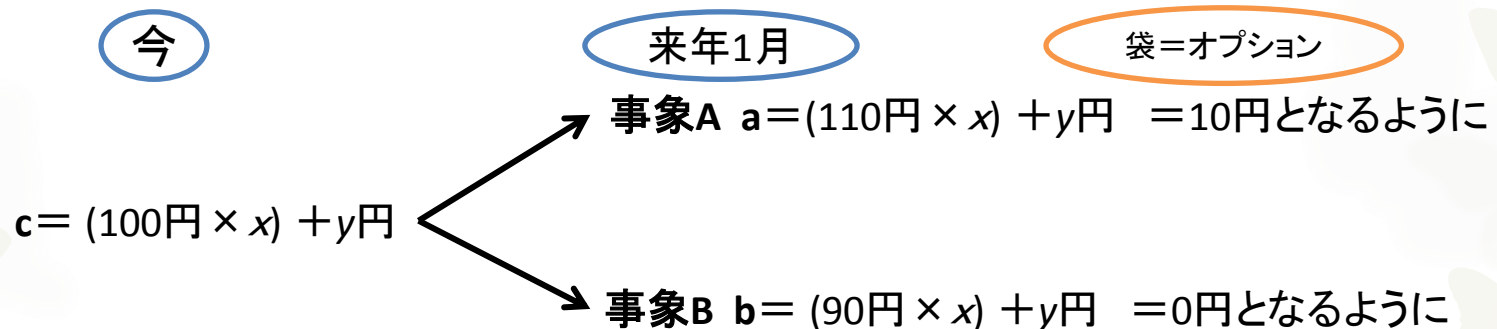
銀行の作戦の立て方

- 銀行は、オプション(来年の春に1ドルを100円で買う権利) 1ドル分売
るのにつき、次の計算をします。

- 現金で、 x ドルと y 円を袋に入れておく
- 今は1ドル100円ということなので、袋の中身は
 $(100円 \times x) + y円$ が必要



- 袋の中身の価値の変化



価格の原理(同じ商品は同じ値段)

- 事象A,Bのどちらが起きても、袋の価値(左辺)とオプション利得(右辺)が一致するという連立方程式を立てる。
 - 事象A $a=110円 \times x + y = 10円$...①
 - 事象B $b=90円 \times x + y = 0円$...②
- 連立方程式を x, y について解くと、 $x=0.5, y=-45$ を得る。
(①-②で、 $20x=10$ ゆえに $x=0.5$. これを②に代入して $y=-45$)
- 来年1月は、袋の中身の価値と、オプションの利得とが完全に一致。
⇒ **袋の中身**を持つことと、**オプション**を持つことは、**来年は等価**
⇒ **現時点でも同じ値段であるべき**
- $c=100円 \times 0.5 + (-45円) = 5円$ ⇒ オプションの値段も5円であるべき
- あれ？確率は関係ないの？

オプション価格5円の求め方 再考

- 来年春に、袋の中身の価値がオプション利得と同じになるように

- $110\text{円} \times x + y\text{円} = 10\text{円}$ ①

- $90\text{円} \times x + y\text{円} = 0\text{円}$ ②

求めたいオプション価格は、 $c = \underline{100\text{円} \times x + y\text{円}}$ の値

- 連立1次方程式①②を x, y について解く代わりに、① $\times p$ +② $\times q$ を計算

$$\{110 \times p + 90 \times q\}x + (p+q)y = 10 \times p + 0 \times q \quad \dots\dots\dots ③$$

- $110 \times p + 90 \times q = 100$ ④

- $p+q=1$ ⑤

とおくと、③式は、 $\underline{100\text{円} \times x + y\text{円}} = 10 \times p + 0 \times q \text{円}$ 左辺が求めたい c

④⑤を解くと、 $p=0.5$ 、 $q=0.5$ だから、 $10 \times p + 0 \times q = 5\text{円}$

別の確率を考えることで、何か見えてくる

- $\{110 \times p + 90 \times q\}x + (p+q)y = 10 \times p + 0 \times q$ = オプション価格……③
 - $110 \times p + 90 \times q = 100$ ④
 - $p+q=1$ ⑤

連立方程式④⑤を解くと、 $p=0.5, q=0.5$ だから、 $10 \times p + 0 \times q = 5$

- **発想の転換** : $p=0.5, q=0.5$ を、それぞれ事象A,Bが起こる**確率とみなす**と、
 - ④式の意味 : 来年春の1ドルの値段の期待値 = 今の1ドルの値段
 - ③式の意味 : オプションの利得額の (p,q) での期待値 = オプションの妥当な価格

オプション価格

= 来年のドルの期待価格が今の価格となる確率での、オプション利得の期待値

★注意 : p, q は「便利な確率」であって、「将来の起こりやすさの意味の確率」ではない。

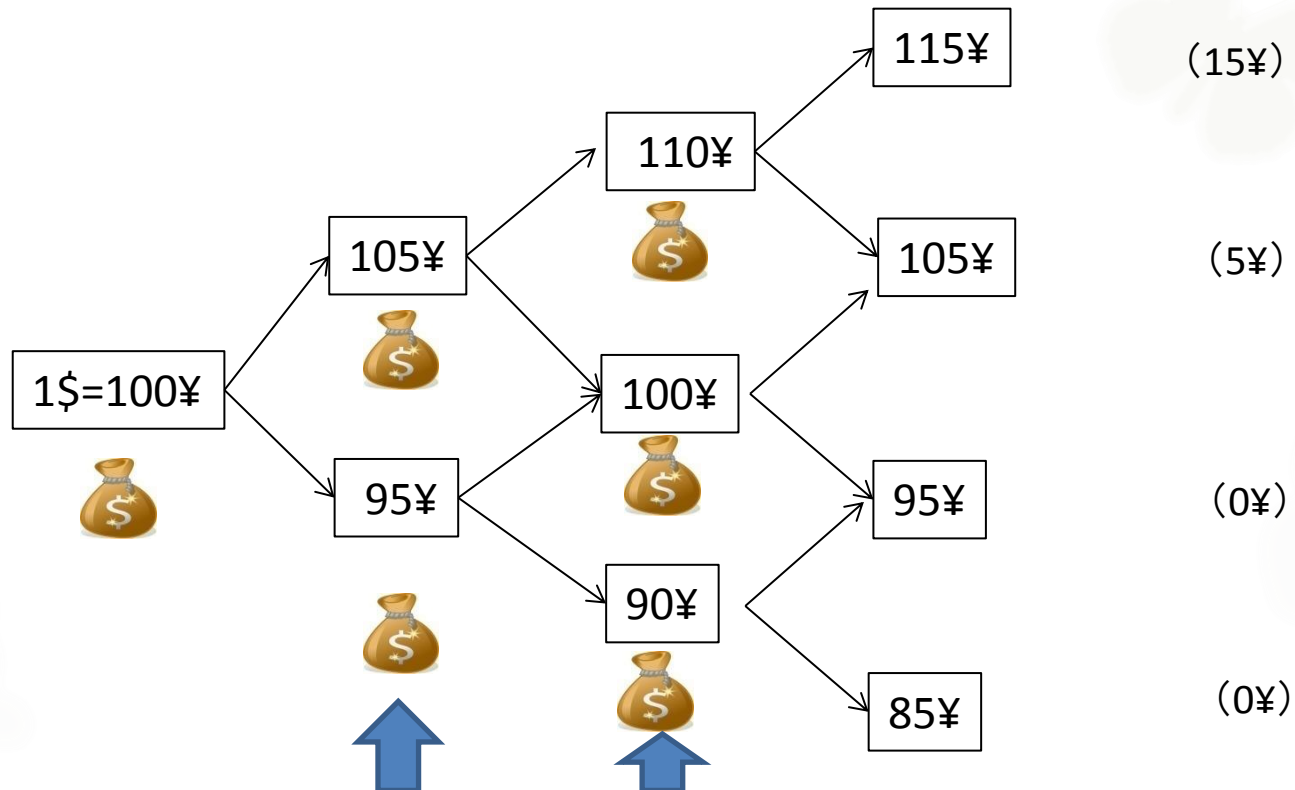
★オプション価格を左右するのは、実際の確率80%、20%ではなくて、
「来年春に起こりうるドルの値段が 110円または90円という仮定」

おかしいモデル

- 来年春に起こりうるドルの値段設定が 110円と120円 だったら？
1ドル(今は100円)が「必ず値上がりする」
⇒借金してでも、ドルを沢山買っておけば、必ずいくらでも大儲け？
世の中そんな甘い話は無いです！
- このような、おかしい設定にすると、 $p \leq 0$ または $q \leq 0$ になる。
- 実は、
「モデルがおかしい設定でない」 $\Leftrightarrow$ 「 $p > 0, q > 0$ 」 (必要十分条件)
- 「 p, q を確率とみなせる」 $\Leftrightarrow$ 「 $p > 0, q > 0$ かつ $p+q=1$ 」
- (⑤式で $p+q=1$ は必ず満たすので、)結局、
「モデルがおかしい設定でない」 $\Leftrightarrow$ 「 p, q を確率とみなせる」
(数理ファイナンスの第1基本定理)

モデルの改良1 (変化する時刻を増やす)

(オプションの利得)



袋の中身: 価値は変えずに¥と\$の内訳を変える

モデルの改良2（変化する時刻をもっと増やす）

- ドルの価格が時々刻々絶えず変化する自然なモデルにしたい

⇒格段に難しくなる(大学院レベル)・・・連続時間の確率過程論

- 鍵となる理論、定理、最先端の手法

- 伊藤積分(確率積分)
- 伊藤の公式、伊藤の表現定理
- 丸山ギルサノフの定理
- 田中の公式
- 楠岡近似

日本の偉大な純粋数学者の偉業が世界の金融界で大活躍