

曲面の分類に関する小平理論

宮岡洋一

November 18, 2014

1 複素多様体

複素多様体とはどんなものであるか．簡単に説明する．

1.1. 射影直線・射影平面・射影空間

複素数全体の集合を \mathbb{C} で表す。 \mathbb{C} は 1 次元ベクトル空間だが、幾何的には平面（ガウス平面）であり、無限に広がった空間である。これを複素アフィン直線とよぶ。（厳密には原点が指定された \mathbb{C} と、特別な点が指定されていないアフィン直線は違う概念であるが、通常特に区別する必要はない）。アフィン直線 \mathbb{C} は無限に広がる図形であるが、しかしこれを小さくまとめた空間（コンパクト空間）に埋め込むことができる。このコンパクト空間が射影直線と呼ばれるものである。

複素数 2 個の組 (x, y) からなるベクトル空間 \mathbb{C}^2 から原点 $(0, 0)$ を除いた空間 $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ を考える。そしてこの空間の二つの点 $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ が $x_1 : y_1 = x_2 : y_2$ をみたすとき P_1 と P_2 は同じ点であると見なす。言い換えると 2 つの数の比の空間である。これを複素射影直線といい、 \mathbb{P}^1 と表す。 $x \neq 0$ ならば $x : y = 1 : y/x$ なので、 $t \in \mathbb{C}$ を $(1 : t) \in \mathbb{P}^1$ を対応させることによって $\mathbb{C} \subset \mathbb{P}^1$ と思うことができるが、 \mathbb{P}^1 には無限遠点と呼ばれる余分な 1 点 $(0 : 1)$ が付け加わっていて、図形的には球面と同じものである（リーマン球面）。原点と座標（それぞれ x, y とする）のついた 2 枚の複素平面 \mathbb{C} を $x \mapsto (x : 1)$, $y \mapsto (1 : y)$ によって \mathbb{P}^1 に入れると、 \mathbb{P}^1 はこれら 2 枚の \mathbb{C} を、 $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ をのりしろとして $y = 1/x$ という関係で貼り合わせたものと考えることができる。

同様に、 $(0, 0, 0)$ でない 3 個の複素数 (x, y, z) の比 $(x : y : z)$ の空間 \mathbb{P}^2 はアフィン平面 \mathbb{C}^2 を開集合 $\{(1 : x : y)\}$ として含み、 $\mathbb{P}^2 = \mathbb{C}^2 \cup \mathbb{P}^1$ である。これを射影平面という。また $\{(1 : x : y)\}$ に加えて $\{(w : 1 : y)\}$, $\{(w : x : 1)\}$

も射影平面に含まれるアフィン平面であって、射影平面はこれら 3 枚のアフィン平面を貼り合わせた空間と考えることができる。

以下複素数の個数を増やしていくことによって、 n 次元射影空間 $\mathbb{P}^n = \mathbb{C}^n \cup \mathbb{P}^{n-1}$ が定義されて、 $n+1$ 個の n 次元アフィン空間を貼り合わせた空間としての構造をもつ。射影空間はコンパクトな多様体である。

正則な $(n+1) \times (n+1)$ 行列 $A = (a_{ij})$ が定める変換 $y_i = \sum_{j=0}^n a_{ij}x_j$ は n 次元射影空間の変換 (射影変換) を定める。射影変換は座標の取り替えにすぎず、射影空間の構造に本質的な影響をおよぼさない。射影変換全体 $\text{PGL}(n+1, \mathbb{C})$ を $n+1$ 次射影変換群 projective transformation group といい、 $n^2 + 2n$ 次元の複素リー群である。

射影空間 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 上の関数とは、 $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ で定義された関数 f で、

$$f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = f(x_0, \dots, x_n)$$

を満たす関数 (0 次斉次関数) である。射影空間上の正則関数は定数関数以外存在しないが、有理関数ならば、同じ次数の斉次多項式の比 (たとえば x/y や $xy/(x^2 + y^2)$ など) として作ることができる。

1.2. 平面代数曲線

$f(x, y, z)$ を d 次の 3 変数斉次多項式とする。たとえば

$$x^2 + y^2 - z^2 \quad (2 \text{ 次}), \quad x^3 + xz^2 + x^3 - y^2z \quad (3 \text{ 次})$$

である。このとき

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^d f(x, y, z)$$

なので、 $f(x, y, z)$ が 0 になるかどうかは比 $x : y : z$ だけで定まり、 f の零点集合

$$V(f) = \{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}); f(x, y, z) = 0\}$$

が射影平面 \mathbb{P}^2 中の部分集合として定まる。 f が定数や 0 でないとき (つまり $V(f)$ が空集合や射影平面全体ではないとき) $V(f)$ を f が定める d 次平面曲線という。また f を平面曲線の定義方程式という。

1 次平面曲線は直線で、1 次射影変換をうまく選べば定義方程式は $x = 0$ の標準形になる。2 次平面曲線は、1 次射影変換を適当に選べば次の 3 種類のうちの 하나가定義方程式となる。

$$x^2 = 0 \quad (2 \text{ 重直線}), \quad xy = 0 \quad (2 \text{ 本の直線}), \quad xy - z^2 = 0 \quad (\text{非特異二次曲線}).$$

これらを $z \neq 0$ で定義されるアフィン平面で見ると,

$$x^2 = 0, \quad xy = 0, \quad xy = 1$$

であり, $y \neq 0$ のアフィン平面では

$$x^2 = 0, \quad x = 0, \quad x = z^2$$

である。3次平面曲線の例としては定義方程式

$$y^2z = x^3 + axz^2 + bz^3$$

をもつ楕円曲線 (アフィン平面では $y^2 = x^3 + ax + b$ や $z = x^3 + axz^2 + bz^3$ 等) がある。

定義方程式が既約であること, つまり d 次多項式 f が $f = f_1f_2$ と d_1, d_2 次式の積に因数分解されないことと, f で定義される平面曲線 C が既約, すなわちより低い次数の平面曲線の和となることとは同値である。

2つの相異なる既約平面曲線を C_1, C_2 とし, その次数を d_1, d_2 とすると, $C_1 \cap C_2$ は有限集合で, その個数は (重複度まで込めて計算すると) d_1d_2 と等しい (Bezout の定理 1779)。

1.3. 平面代数曲線の特異点と2次変換

定義方程式 f をもつ d 次平面曲線 C の点 $P = (a, b, c)$ (とくに $f(P) = 0$) が C の特異点 singular point であるとは,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P) = \frac{\partial f}{\partial y}(P) = \frac{\partial f}{\partial z}(P) = 0$$

が成立すること, つまり3つの偏微分がすべて P で消えることである (f が d 次の斉次多項式であることからオイラーの恒等式 $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = df$ が成立しているので, 2つの偏微分が消えれば残りの1つも自動的に消える。また $c = 1$ で P がアフィン平面 $z \neq 0$ にあるときは, $f(a, b, 1) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b, 1) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b, 1) = 0$ という条件と同じである)。特異点の例としては (アフィン平面上で) $xy = 0$ (通常2重点), $y^2 - x^3 = 0$ (尖点), $y^2 - x^4 = 0$ (tacnode) などが代表的である。

特異点をもたない平面曲線を非特異な平面曲線という。非特異な平面曲線の方程式 $f = 0$ は, 局所的に直線 (接線) の方程式

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(P)(y - b) + \frac{\partial f}{\partial z}(P)(z - c) = 0$$

とほぼ同じと考えることができ、なめらかで P の近くではアフィン直線 \mathbb{C} のように見える。

平面曲線は一般にはいろいろな特異点を含む。しかし簡単な「有理座標変換」を行うことによって、通常2重点以外の特異点を含まない曲線に変えることができる。この変換は、2次変換とよばれるもので、点 $(x : y : z)$ に対して $(yz : zx : xy) = (1/x : 1/y : 1/z)$ を対応させる変換である。この2次変換と1次座標変換とを組み合わせると、どんな平面曲線も特異点としては通常2重点のみをもつ平面曲線 $C^* = V(f^*)$ に変換できる。さらに C^* の通常2重点を3次元射影空間内で立体交差させることにより、特異点解消を構成することもできる。具体的には、座標変換を適当に行って、無限直線 $z = 0$ と C^* の交点はすべて非特異点と仮定する。 C^* の特異点すべてを含み同じ次数の平面曲線を2つ一般にとり、その方程式を g, h とする。 $(x : y : z) \in C^*$ に対して $(gx : gy : gz : hz) \in \mathbb{P}^3$ を対応させるような変換をとると、 C^* は非特異な空間曲線に写される。

例 $y^2z = x^3 + x^2z$ は $(0 : 0 : 1)$ に通常2重点をひとつ持つ。アフィン座標では $y^2 = x^2(x+1)$ すなわち $y = \pm x\sqrt{1+x}$ だから、 $x, y \rightarrow 0$ のとき、 y/x は ± 1 に近づき、したがって $(x^2 : xy : xz : yz)$ は2点 $(0 : 0 : 1 : \pm 1)$ に近づくことになって、通常2重点の立体交差が得られた。

1.3. 射影代数多様体

射影空間 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ の中で、有限個の斉次多項式 f_1, \dots, f_m の共通零点として表される集合 $V(f_1, \dots, f_m)$ が射影代数集合 projective algebraic set である。とくに1個の斉次多項式の零点集合 $V(f)$ は超曲面 hypersurface と呼ばれる。射影代数集合 X がより小さい射影代数集合の有限和として表せないとき、 X は既約 irreducible であるといい、また射影代数多様体 projective algebraic variety であるという。

$\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 上の有理関数 $\varphi = f(x_0, \dots, x_N)/g(x_0, \dots, x_N)$ (ただし f, g は等しい次数の斉次多項式) の分母 g が代数多様体 X で恒等的に0でなければ φ を X に制限することができ、 X の有理関数 rational function という。 X の有理関数全体を X の関数体といい $\mathbb{C}(X)$ と表す。 $\mathbb{C}(X)$ は定数関数全体 \mathbb{C} を含む体であって、次のような構造をもつ。代数的に独立な元 $t_1, \dots, t_d \in \mathbb{C}(X)$ と既約多項式 $F(u) \in \mathbb{C}[t_1, \dots, t_d]$ が存在して

$$\mathbb{C}(X) = \mathbb{C}(t_1, \dots, t_d)[u]/(F)$$

(Emmy Noether の正規化定理)。いいかえると、 X と F が定める超曲面とは双有理同値、すなわち同じ関数体をもっている。ただしこの超曲面は一般には複雑な特異点をもつ。

二つの非特異代数多様体双有理同値ならば、比較的簡単な操作で両者を結ぶことができ、性質が似ている。たとえば両者の基本群は同じである。

1.4. 特異点と非特異点

$X = V(f_1, \dots, f_m) \subset \mathbb{P}^N$ の点 p が非特異 nonsingular であるとは、斉次多項式 g_1, \dots, g_{N-d} があって、

(a) p の近くでは X は $g_1 = \dots = g_{N-d} = 0$ で定まる集合と一致していて、

(b) ヤコビ行列

$$\begin{pmatrix} \partial g_1 / \partial z_0(p) & \dots & \partial g_1 / \partial z_N(p) \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial g_{N-d} / \partial z_0(p) & \dots & \partial g_{N-d} / \partial z_N(p) \end{pmatrix}$$

の階数は $N - d$

が成立していることである。 p の近くで \mathbb{P}^N を \mathbb{C}^N の原点の近傍と同一視し、陰関数定理を思いすと、この条件は複素解析的局所座標 z_1, \dots, z_N をうまくとれば、 X が $z_{d+1} = \dots = z_N = 0$ と書けるということであって、 X 内の p の近傍は、複素解析的には d 次元アフィン空間 \mathbb{C}^d の原点の近傍と同一視できることになる。

例 パラメータ表示で $(x : y : z : w) = (s^3 : s^2t : st^2 : t^3)$ で定まる空間曲線は、3つの方程式 $xw = yz$, $xz = y^2$, $yw = z^2$ で定義される。 $x \neq 0$ というアフィン空間に制限すれば $x = 1$ として方程式は $w = yz$, $z = y^2$, $yw = z^2$ であるが、これは2個の方程式 $z = y^2$, $w = y^3$ に帰着する。この曲線は非特異である。

代数多様体 X の点はほとんどすべて非特異点であり、上に出てきた d を X の次元という。有名な広中の特異点解消定理は、前前節で見た2次変換や空間曲線への変換を一般化した概念である爆発 blowing up という操作を適切に繰り返すことによって、特異点をもつ代数多様体を非特異代数多様体へ変換できるという結果である。この定理によって、代数多様体に関する多くの問題は非特異代数多様体に関する問題に帰着する。

1.5. 実多様体・複素多様体

d を正の整数とする。どの点をとっても、その近傍が局所的には \mathbb{R}^d の領域と同じであって、微分可能な関数といった概念が自然に定義される空間を d 次元(実)多様体という。ユークリッド空間 \mathbb{R}^N 内で定義された $N - d$ 個

の C^∞ 関数 f_{d+1}, \dots, f_N の零点として定義される閉部分集合 M は、そのヤコビ行列が M の各点で階数 $N - d$ をもつなら、 d 次元多様体である（陰関数定理）。たとえば \mathbb{R}^{d+1} の中で $x_0^2 + \dots + x_d^2 - r^2 = 0$ によって定義される球面は d 次元の実多様体である。

同様に、各点の近傍が \mathbb{C}^d の領域と同じであって、正則な関数という概念が自然に定義される空間（つまりは正則関数による座標変換で貼り合わせてできる空間）を d 次元複素多様体という。非特異な射影代数多様体は自然に複素多様体とみなすことができる。代数多様体を複素多様体と考えるメリットは、複素関数論や関数解析といった手法を自由に使えるようになる（超越的方法 transcendental method）ことである。典型的な例は計量を用いた調和解析 harmonic analysis であって、ホッジ理論や小平消滅定理といった有名な諸結果を含んでいる。

一方、 \mathbb{C}^d を \mathbb{R}^{2d} とみなすことにより、 d 次元複素多様体は（向きづけられた） $2d$ 次元実多様体の構造を自然にもっている。したがって複素多様体を実多様体と考えると、その位相構造を考えることができる。たとえば基本群やホモロジー群、コホモロジー群といった概念が自然に定義される（位相構造）。 d 次元の非特異射影代数多様体は自然な向きをもつ $2d$ 次元コンパクト実多様体である。

実多様体および複素多様体の解析構造と位相構造を結びつけるのはド・ラム理論とホッジ理論である。これらは二つとも多様体の実係数（複素係数コホモロジー群）を微分形式で記述する理論である。ド・ラム De Rham の定理は実多様体 M の実数係数コホモロジー群 $H^k(M, \mathbb{R})$ はド・ラム・コホモロジー群

$$\{k \text{ 次微分形式 } \eta; d\eta = 0\} / d\{k-1 \text{ 次微分形式}\}$$

と同型であることを主張する。ホッジ理論はもうすこし複雑な形をしているが、最も簡単な場合として、代数多様体 X の複素数係数の 1 次コホモロジー $H^1(X, \mathbb{C})$ については、 X 上の正則 1 次微分形式全体の空間とその複素共役の直和と自然に同型であると主張する。とくに

- (1) X 上の大域的に正則な 1 次微分形式 ω は d 閉（すなわち $d\omega = 0$ ）
- (2) X の第 1 ベッチ数 $b_1(X) = \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathbb{C}) = \dim_{\mathbb{R}} H^1(X, \mathbb{R})$ は偶数が成立する。

念のために、 n 次元実多様体 M 上の 1 次微分形式とは局所的に $\eta = \sum \eta_i(x) dx_i$ のように書けるものである。ただし係数の $\eta_i(x)$ は C^∞ 関数で、局所座標 (x_1, \dots, x_n) を新しい座標 (y_1, \dots, y_n) に変えたとき、

$$dy_i = \sum_j \frac{\partial y_i}{\partial x_j} dx_j$$

であり，それに伴って係数の関数は

$$\eta_i(x) = \sum_j \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \eta_j(y)$$

という変換を受けるものとする。一般の k 次微分形式は 1 次微分形式の k 次の外積として表されるものである。複素多様体 X 上の正則微分形式も同様の定義であるが，係数としては正則関数をとっている。

2 リーマン面と代数曲線

19 世紀までにほぼ解明された代数曲線の理論を，大道具をできるだけつかわずに説明する。

2.1. 向き付け可能で閉じた曲面の位相的分類

非特異な射影代数曲線 C とは非特異 1 次元の射影代数多様体のことである。これを 2 次元実多様体として見ると，向きづけられコンパクト曲面であり，リーマン面 Riemann surface と呼ばれる。向きづけられたコンパクト曲面の位相は簡単にわかり (図)，穴の数である種数 $g = g(C)$ によって定まる。0 次と 2 次のベッチ数は 1 で 1 次のベッチ数は $2g$ ，オイラー数 $e = e(C)$ は $2 - 2g(C)$ となる。また C には定曲率をもつリーマン計量が入り，曲率はオイラー数 e の符号に応じて正，ゼロ，負となる。

その基本群 $\pi_1(C)$ は $2g$ 個の元 $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g$ で生成され，関係式

$$\alpha_1 \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \alpha_2 \beta_2 \alpha_2^{-1} \beta_2^{-1} \cdots \alpha_g \beta_g \alpha_g^{-1} \beta_g^{-1} = 1$$

をみtas。とくに $\pi_1(C)$ は $g = 0$ のとき自明， $g = 1$ のとき自由アーベル群 \mathbb{Z}^2 ， $g \geq 2$ のとき非可換群である。これら $2g$ 個のループに沿って C に切れ目を入れ切り開くと， C は $4g$ 角形になり，上にあげた関係式の左辺は $4g$ 角形の周を表している。

またリーマンの写像定理によれば，単連結な 1 次元複素多様体は射影直線 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ，複素平面 \mathbb{C} ，上半平面 \mathbb{H} のいずれかと同型であり，これら 3 種類は， $g = 0$ ， $g = 1$ ， $g \geq 2$ なる C の普遍被覆に対応している。このことから $g = 1$ の曲線は \mathbb{C} を格子 Λ で割って得られる 1 次元複素トーラス complex torus であることが従う。

以上の考察から， $e > 0$ すなわち $g = 0$ のときと， $e = 0$ ， $g = 1$ のとき，また $e < 0$ ， $g \geq 2$ のときでは， C の性質がかなり異なることがわかる。

2.2. 代数曲線上の有理関数と因子

$C \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ を非特異な射影代数曲線とする。 C の有理関数 $\varphi \in \mathbb{C}$ は C を複素多様体と考えれば C で定義された有理型関数とすることができる。じつは逆に C 全体で定義された有理型関数は有理関数であることが知られている。ちなみに C の有理関数体 $\mathbb{C}(C)$ は $\mathbb{C}(t)[u]/(F)$ の形、つまり (一般には特異点をもつ) 平面曲線の関数体であった。

代数曲線に特有の事情として、非特異射影的雙有理モデルの一意性がある。すなわち二つの非特異射影曲線 C_1, C_2 の関数体 $\mathbb{C}(C_1), \mathbb{C}(C_2)$ が \mathbb{C} 上の体として同型ならば、代数多様体として同型 (したがって複素多様体としても同型) になるという事実である。これは 1 次元特有の事態であって、2 次元以上では決して成り立たない。

C を複素多様体と考える。1 点 p の近傍で定義された 0 でない有理型関数 f は、適当な局所座標 z を選ぶと $p = \{z = 0\}$, $f = z^{v(f,p)}$ と表すことができる。 $v(f,p) > 0$ のとき f は p に $m(f,p)$ 位の零点 zero をもつといい、 $v(f,p) < 0$ なら f は p に $-m(f,p)$ 位の極 pole をもつという。 f に対して $v(p,f) \in \mathbb{Z}$ を対応させることにより、群の準同型 $v(p,*) : \mathbb{C}(C)^\times \rightarrow \mathbb{Z}$ であって、 $v(p, f+g) = \min\{v(p,f), v(p,g)\}$ をみたすもの、すなわち関数体 $\mathbb{C}(C)$ の付値 valuation が定義される。これを p に付随した付値という。実は $\mathbb{C}(C)$ の付値と C の点は 1:1 に対応し、この対応によって関数体から C を復元することができる。以上をまとめると、非特異射影代数曲線 C に対しては自然な対応

代数多様体の構造 \rightarrow 複素多様体の構造 \rightarrow 関数体 \rightarrow 代数多様体の構造
 があって、これら 3 つの構造は三位一体 trinity をなす。

C の 0 でない有理関数 f に対して、その零点や極は有限個しか存在しないから、

$$(f) = \sum_{p \in C} v(f,p)p$$

は有限和である。 (f) を f が定める主因子 principal divisor という。

例. $C = \{(x:y:z); y^2z = x^3 - z^3\}$ とすると、

$$(z/y) = 3p_\infty - p_0 - p_1 - p_2, \quad (x/y) = q_+ + q_- + p_\infty - p_0 - p_1 - p_2$$

ここで

$$p_\infty = (0:1:0), \quad p_i = (1:0:e^{2\pi\sqrt{-1}/3}), \quad q_\pm = (0:1:\pm\sqrt{-1}).$$

一般に C の因子 divisor とは、整数を係数とする C の点の有限和 $D = \sum_p m(p)p$ のことをいう。その係数の和 $\deg D = \sum m(p)$ は D の次数 degree と呼ばれる。すべての係数 $m(p)$ が非負であるとき D は有効因子 effective divisor であるといい、 $D \geq 0$ と書く。 $D \geq D'$ は $D - D' \geq 0$ を意味する。

C の因子全体 $\text{Div}(C)$ は加法によってアーベル群となり主因子全体 $\text{PDiv}(C)$ は $(\varphi) + (\xi) = (\varphi\xi)$, $-(\varphi) = (1/\varphi)$ によってその部分群となる。主因子の次数は必ず 0 である。二つの因子 D, D' が線形同値 linearly equivalent とは $D - D'$ が主因子となることであり、 $D \sim D'$ と表す。線形同値な因子の次数は等しい。線形同値類のなす群 $\text{Pic}(C) = \text{Div}(C)/\text{PDiv}(C)$ を C の因子類群 divisor class group と呼ぶ。次数 d の因子全体の線形同値類は $\text{Pic}^d(C)$ と書く。 $\text{Pic}^0(C)$ は $\text{Pic}(C)$ の部分群である。

有理微分形式 $\omega = \omega(z)dz$ の係数となる $\omega(z)$ は局所的には有理 (型) 関数なので、その零点や極は C の因子を定め、その線形同値類 K_C は ω の取り方に依存しない。 $K_C \in \text{Pic}(C)$ を C の標準因子 canonical divisor という。

例 $\mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^1 \cup \mathbb{A}^1 = \{x\} \cup \{y\}$, $y = 1/x$ 上の有理関数 $(\beta x - \alpha y)/x$ が定める主因子は $(\alpha : \beta) - (1 : 0)$ となり、すべての $p, q \in \mathbb{P}^1$ に対して $(p) \sim (q)$ である。したがって \mathbb{P}^1 上次数 d の線形同値類はただ一つであって、 $\mathcal{O}(d)$ と表すことがある。有理微分形式 $dx = -dy/y^2$ の定める因子は $-2(1 : 0)$ なので、 $K_X = \mathcal{O}(-2) \in \text{Pic}(C)$ である。

$f : C \rightarrow B$ を (定数でない) 正則写像とする。 $p \in C$ のまわりの C の局所座標を x (原点 $x = 0$ が p)、 $f(p)$ のまわりの B の座標を y (原点 $y = 0$ が $f(p)$) とすると、 f は局所的には方程式 $y = f(x)$ のグラフとすることができる。 $f(x)$ のテーラー展開は $f(x) = x^r(a_0 + a_1x + \dots)$ の形である ($r \geq 1, a_0 \neq 0$)。 $r = r(p, f)$ は p における f の分岐指数 ramification index と呼ばれる。 $f(p)$ の周りで定義された有理型関数 $h(y)$ は Laurent 展開 $h(y) = y^{v(f(p), h)}(b_0 + b_1y + \dots)$ をもつ。 y に $f(x)$ を代入すると、 $f^*h(x) = h(f(x)) = y^{rv(f(p), h)}(a_0^r b_0 + \dots)$ であり、 p で $rv(f(p), h)$ 位の零点あるいは $-v(f(p), h)$ 位の極をもつ。このことを考えて、 B 上の因子 $E = \sum e(q)q$ に対して、 f による E の引き戻し pullback を

$$f^*E = \sum_{p \in C} r(p, f)e(f(p))p$$

と定義する。 E が一点から定まる因子 q であるとき、 f^*q の次数 $\deg f^*q$ は q の取り方によらず一定の数 $\deg f$ であって、 f の次数 degree または f の写像度 mapping degree と呼ばれる。一般に $\deg f^*E = (\deg f)(\deg E)$ が成立する。

2.3. 曲線のリーマン・ロッホの定理

代数曲線 C と C 上の因子 $D = \sum m(p)p = \sum m_i p_i$ を与えたとき, 関数体 $\mathbb{C}(C)$ の部分 \mathbb{C} ベクトル空間

$$L(C, D) = \{f \in \mathbb{C}(C); (f) + D \geq 0\}$$

は有限次元であり, その次元を $l(C, D)$ と書く。

例 $D = 0$ ならば $L(C, 0) = \{ \text{極をもたない有理関数} \}$ であり最大値の原理から, 定数関数全体と一致する。したがって $l(C, 0) = 1$ である。

D と線形同値な因子 $D - (g)$ に対して $L(C, D - (g)) = g \cdot L(C, D) \simeq L(C, D)$ であり, $l(C, D)$ は D の線形同値類のみで決まる。特に $l(C, K_C)$ や $l(C, K_C - D)$ はきちんとした意味をもつ。

リーマン・ロッホの定理 theorem of Riemann-Roch は等式

$$l(C, D) - l(C, K_C - D) = \deg D + 1 - g$$

が成立することを主張する。ここで $g = g(C)$ は C だけで定まり D に依存しない定数である (リーマン・ロッホの証明は次節で述べる層のコホモロジー理論と Serre 双対仮定すれば易しくできてしまうので, ここでは触れない)。

$D = 0$ を代入してみると, $g = l(C, K_C) \geq 0$ であることがわかる。そして $L(C, K_C)$ は極をもたない (つまり正則な) 有理 1 次微分形式全体のベクトル空間である。するとホッジ理論から, $H^1(C, \mathbb{C}) = L(C, K_C) \oplus \overline{L(C, K_C)}$ が成立し, g は C の 1 次コホモロジー群の次元の半分, つまり C を 2 次元実多様体と見た場合の種数にほかならない。

一方 $D = K_C$ を代入してみると,

$$g - 1 = l(C, K_C) - l(C, 0) = \deg K_C + 1 - g$$

であるから, $\deg K_C = 2g - 2$ が成り立つ。したがって $g = 1$ ならば 0 でない正則な 1 次微分形式が存在し ($l(C, K_C) = 1 > 0$), どこにも零点をもたない ($\deg K_C = 0$)。

練習問題 リーマン・ロッホを用いて以下を示せ。

(1) $g(C) = 0$ ならば, $p, q \in C$ に対して $p \sim q$ である。

注意 一般に, 代数曲線 C の相異なる 2 点 p, q に対して $p \sim q$ であると仮定すると, $(f) = p - q$ となる有理関数 f をとり, 点 $x \in C$ に対して $(1 : f(x)) \in \mathbb{P}^1$ を対応させることにより, 1:1 写像 $C \simeq \mathbb{P}^1$ ができ, C は \mathbb{P}^1 と同型になる。したがって (1) 種数が 1 以上

の曲線では $p \sim q$ なら $p = q$ であり, (2) 種数 0 の射影代数曲線すべて \mathbb{P}^1 と同型である (ただし (2) がリーマンの写像定理からも導かれることはすでに上で見ている)。

(2) $g(C) = 1$ とし, C の一点 o を固定する。このとき, 次第に増大するベクトル空間の列

$$L(C, 0) \subset L(C, o) \subset L(C, 2o) \subset L(C, 3o) \subset \dots$$

の次元は $1, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ である。このとき次元の増加に伴って新たに付け加えるべき基底として $1, 0, f, g, f^2, fg, f^3, f^3g, f^4, \dots$ をとることができる。 $g^2 \in L(C, 3o)$ は $1, f, g, f^2, fg, f^3$ の一次結合として表され, $g^2 = \alpha f^3 + \beta fg + \gamma f^2 + \delta g + \epsilon f + \zeta$ と書ける。さらに f, g を適当にとりかえれば, $g^2 = 4f^3 + af + b$ の形 (Weierstrass 標準形) にすることができる。したがって $g = 1$ の曲線は平面 3 次曲線として表すことができる。

2.4. 分岐と Hurwitz の定理

C, B を射影代数曲線とし, $f: C \rightarrow B$ を定数写像ではない正則写像とする。 $p \in C$ のまわりの C の局所座標を x (原点 $x = 0$ が p), $f(p)$ のまわりの B の座標を y (原点 $y = 0$ が $f(p)$) として, f を $y = f(x)$ のグラフと考え, そのテーラー展開は $f(x) = a_r x^r + \dots, r > 0, a_r \neq 0$ とする。 x, y を適当に正規化すれば $a_r = 1$ としてよく, さらには近傍を十分小さくとれば $y = f(x) = x^r$ としてもよい。 $r \geq 1$ は f の $p \in C$ における分岐指数である。ほとんどすべての点で分岐指数は 1 であり, 分岐指数が 2 以上の点 $\in C$ は有限個である。これらの点を分岐点 ramification point と呼ぶ。また分岐点の f による像 $\in B$ を分枝点 branch point という。

ω を B の上の有理微分形式とする。 $p \in C$ の像 $f(p) \in B$ の近くでは $\omega = \omega(y)dy$ と書けているので, f によるその引き戻し $f^*\omega = \omega(f(x))(dy/dx)dx$ は $p \in C$ の周りで定義された有理型微分形式であり, $y = x^r$ ならば, $f^*\omega = r\omega(x^r)x^{r-1}dx$ である。したがって, $f^*\omega$ は C 上の有理微分形式であって, その p における零点 (あるいは極) の位数は $\omega(x^r)$ の零点の位数に $r + 1$ を加えた数になる。特に

$$K_C = f^*K_B + \sum_{p \in C} (r(p, f) - 1)p$$

が成り立つ。この式をフルヴィッツの公式 Hurwitz formula という。

例 $B = \mathbb{P}^1, \deg f = 2$ とすると (すなわち \mathbb{P}^1 の 2 重分岐被覆を考えると), $q \in C$ に対して $\deg f^*q = \sum_{p \in f^{-1}(q)} r(p, f) = 2$ であるから, $f^{-1}(q)$ は高々 2 点であり, 一点であることと q が分枝点であることは同値である。したがって, この場合, 分岐点の個数 = 分枝点の個数 (一般には, 分岐点の個数 \geq 分枝点の個数) が成立

し, その個数を b とすると, $b = 2g(C) + 2$ である。逆に, \mathbb{P} の $2g + 2$ 個の点で分岐する 2 重分岐被覆 $y^2 = (x - a_1) \cdots (x - a_{2g+2})$ をとると, その種数は g である。したがってすべての g に対して, 種数 g の射影代数曲線は存在する。 \mathbb{P} の 2 重分岐被覆として得られる曲線を $g = 1$ のときは楕円曲線 elliptic curve, $g \geq 2$ のときは超楕円曲線 hyperelliptic curve という。

アーベルの定理・ヤコビの定理・トレリの定理

C を種数 $g \geq 1$ の代数曲線とする。このとき $l(C, K_C) = g$ だったので, g 個の一次独立な正則微分形式 $\omega_1, \dots, \omega_g$ がある。 C の一点 o をあらかじめ定めておく。 C の点 p に対して, o と p を曲線 γ で結び, 線積分の組

$$\alpha(p) = \left(\int_{\gamma} \omega_1, \dots, \int_{\gamma} \omega_g \right)$$

を考えると, 多値な正則写像 $\tilde{\alpha} : C \rightarrow \mathbb{C}^g$ が得られる。多価性は γ の選びかたからきており, 一方 Green-Stokes の定理によって 0 にホモロガスな閉曲線での積分は 0 になるので, 結局多価性は C の整数係数 1 次ホモロジーでの積分と等しい。ホモロジーの生成元を $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g$ とし, $\left(\int_{\alpha_i} \omega_1, \dots, \int_{\alpha_i} \omega_g \right), \left(\int_{\beta_j} \omega_1, \dots, \int_{\beta_j} \omega_g \right)$ が生成する格子を $\Lambda \subset \mathbb{C}^g$ とおくと, $\alpha(p) = \tilde{\alpha}(p) \bmod \Lambda$ と定義して, 一価正則写像 $\alpha : C \rightarrow \text{Jac}(C) = \mathbb{C}^g / \Lambda$ を得る。 $\text{Jac}(C)$ を C のヤコビ多様体と呼ぶ。定義からヤコビ多様体は複素トーラスであり, 単位元を $\alpha(o)$ としてアーベル群の構造をもっている。ヤコビ多様体は実は射影代数多様体の構造ももち, 主偏極アーベル多様体の一種である。

C の k 個の点 p_1, \dots, p_k に対して $\alpha_k(p_1, \dots, p_k) = \sum \alpha(p_i)$ とおけば, $\alpha_k : C^{(k)} = C^k / \mathfrak{S}_k \rightarrow \text{Jac}(C)$ が定義される。この写像を用いると, 代数曲線論の基本定理であるアーベルの定理およびヤコビの定理は次のように述べられる。

- (1) $p_1, \dots, p_k \in C$ とすると, $\alpha_k(p_1, \dots, p_k) = 0 \in \text{Jac}(C) = 0$ となることと $\sum p_i - ko \in \text{Pic}^0(C)$ は同値である。 $k = 1$ のとき, C は α により $\text{Jac}(C)$ の中に埋め込まれる。
- (2) α_g は双有理写像である。特に次数が k の一般の因子 D は $l(C, D) = \max\{0, k - g + 1\}$ をみたす。この等式を満たさない因子 (必然的に $0 \leq k \leq 2g - 2$ となる) を特殊因子 special divisor と呼ぶ。またテータ因子 $\Theta_C = \alpha_{g-1}(C)$ は $\text{Jac}(C)$ の因子である (テータ因子が主偏極を定めている)。

(1) と (2) を合わせると, $\text{Pic}^0(C)$ と $\text{Jac}(C)$ はアーベル群として同型であることがわかる。したがって $\text{Pic}(C) \simeq \mathbb{Z} \times \text{Jac}(C)$ である。

以上見てきたように, 代数曲線 C を決めれば g 次元主偏極多様体であるヤコビ多様体 $(\text{Jac}(C), \Theta_C)$ が決まる。この対応が単射であること, すなわち $(\text{Jac}(C_1), \Theta_{C_1}) \simeq (\text{Jac}(C_2), \Theta_{C_2})$ ならば $C_1 \simeq C_2$ であることを主張するのが Torelli の定理である。

2.5. 代数曲線のモジュライ

前にみたように $g = 0$ の非特異代数曲線は射影直線と同型であった。また $g = 1$ ならば C はアフィン座標では $y^2 = (x$ の 3 次式) の形に書け, さらに適当に座標変換すれば $y^2 = x(x - 1)(x - \lambda)$ の形に書き換えることができる。したがって $g = 1$ の曲線全体は 1 つの変数 λ でパラメータ付けできる。

リーマンは, 一般種数の曲線が $3g - 3$ 個のパラメータをもつことを, 以下のような議論で示した。

$g \geq 2$ の曲線に対して, 次数 $g + 1$ の一般の因子 D をとる。すると $l(C, D) = 2$ なので, $L(C, D)$ から 2 つの独立な有理関数 f_1, f_2 をとり, $f(p) = (f_1(p) : f_2(p))$ によって次数 $g + 1$ の全射 $f : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ が定義される。 D が一般ならば, f の分岐指数は高々 2 であって, 分岐点の個数 (= 分枝点の個数) は Hurwitz の公式から $4g$ である。 \mathbb{P}^1 に作用する 3 次元の射影変換群 $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$ によって $4g$ 個の分岐点のうち 3 個は定点 (たとえば $0, 1, \infty$) に固定できるので, 分岐点の自由度は $4g - 3$ 個である。また D の選択の自由度が C を決めるごとに g 次元あるので, 結局 C は $3g - 3$ 個のパラメータをもつことになる。

リーマンの議論は本質的には正しいが, やや厳密性に欠ける。Mumford は幾何学的不変式論を構築することによって, 非特異代数曲線の同型類全体をパラメトライズする $3g - 3$ 次元の準射影代数多様体 \mathcal{M}_g を記述した。また Deligne-Mumford は \mathcal{M}_g の自然なコンパクト化である射影代数多様体 $\overline{\mathcal{M}}_g$ を構成した。

3 層とそのコホモロジー

代数曲線のリーマン・ロッホ定理は, 零点や極に条件をつけた大域的な有理関数の言葉で記述できた。しかし 2 次元以上の話になると, 曲線のようなわけにはいかなくなって, 厳密な数学を展開するためには, 層の概念が必要になる。層の概念の原型は岡潔の多変数関数論にすでに現れるが, 以下に述べるような使いやすい形で述べたのは Leray である。古典的なイタリア学派は

代数曲面論を展開して深い結果を多数得たが，層とそのコホモロジー理論がまだ使えなかったため，議論が非常にわかりにくいものになっている。以下では層とそのコホモロジーについて，簡単に説明する。

3.1. 層の定義

X を位相空間とする。 X 上のアーベル群の層 \mathcal{A} とは， X のひとつひとつの開集合 U に，アーベル群 $\Gamma(U, \mathcal{A})$ を対応させる規則であって，条件

- (a) 開集合に包含関係 $U \supset V$ があれば制限写像とよばれる群準同型 $\rho_{UV} : \Gamma(U, \mathcal{A}) \rightarrow \Gamma(V, \mathcal{A})$ があり， $U \supset V \supset W$ ならば両立条件 $\rho_{UV} = \rho_{VW} \rho_{UV}$ が成立する。
- (b) 開集合 U が開集合の族 U_α の和集合であるとき，
 - (b-1) $a \in \Gamma(U, \mathcal{A})$ に対して $\rho_{UU_\alpha} = 0$ がすべての α について成り立っていれば $a = 0$ 。
 - (b-2) すべての α に対して $a_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{A})$ が定まっており， $\rho_{U_\alpha U_{\alpha\beta}}(a_\alpha) = \rho_{U_\beta U_{\alpha\beta}}(a_\beta)$ (ただし $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$ とおいた) をみたしていれば，ある $a \in \Gamma(U, \mathcal{A})$ があって $a_\alpha = \rho_{UU_\alpha} a$ となっている。

をみたしているものをいう。これらは， \mathcal{A} に関しては局所的データから大域的なデータが完全に決まるという条件である。

例 もっとも基本的な例は実多様体 X の開集合 U に対して U で無限回微分可能な r 次微分形式全体の空間を対応させる層 \mathcal{D}_X^r や， X が複素多様体上であるときは， U に U 上の正則関数全体を対応させる層 \mathcal{O}_X である。また非特異代数多様体 X 上の因子 D を与えたとき， $\Gamma(U, \mathcal{O}_X(D))$ を U 上の $(f) + D \geq 0$ をみたす U 上の有理型関数全体とすれば $\mathcal{O}_X(D)$ は局所的に \mathcal{O}_X と同型な層 (可逆層) である。代数多様体 X 上の有理関数の層 \mathcal{K} は定数層 constant sheaf である。言い換えるとすべての空でない開集合 U に対して $\rho_{XU} : \Gamma(X, \mathcal{K}) = \mathbb{C}(X) \xrightarrow{\sim} \Gamma(U, \mathcal{K}) = \mathbb{C}(X)$ が成立する。 U 上の実数値あるいは複素数値局所定数関数全体を $\Gamma(U, \mathbb{R}_X), \Gamma(U, \mathbb{C}_X)$ で表せば，これらも層である。また U 上の局所 2 乗可積分関数を $\Gamma(U, L_{X,loc}^2)$ とすれば $L_{X,loc}^2$ は層であるが， U 上の 2 乗可積分関数を対応させても層にならない。大域的な可積分条件は局所的条件からは決まらないからである。同様に U に U 上の定数関数全体を対応させても層にはならない。 U が連結でなければ，各連結成分ごとに違った定数値をとる関数があるからである。

X の一点 p をとる。層 \mathcal{A} の p における芽 germ とは p を含む開集合の系と制限写像による帰納極限

$$\mathcal{A}_p = \lim_{U \ni p} \mathcal{A}(U)$$

をいう。

例 定数層 \mathcal{K}_X では $\mathcal{K}_{X,p} = \mathbb{C}(X)$. 局所定数層 $\mathbb{R}_X, \mathbb{C}_X$ に対しては $\mathbb{R}_{X,p} = \mathbb{R}, \mathbb{C}_{X,p} = \mathbb{C}$. $\mathcal{O}_{X,p}$ は, p における展開をとることによって収束べき級数環 $\mathbb{C}\{\{x_1, \dots, x_n\}\}$ と同型。

二つの層 \mathcal{A}, \mathcal{B} の間の準同型 $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ とは, 各開集合 U に対して準同型 $f(U): \mathcal{A}(U) \rightarrow \mathcal{B}(U)$ が定まっており, 制限写像と可換であることをいう。層の準同型 f はアーベル群の準同型 $f_p: \mathcal{A}_p \rightarrow \mathcal{B}_p$ を引き起こす。準同型 f が単射 (全射) であるとはすべての p に対して f_p が単射 (全射) であることをいう。また準同型の列 $\dots \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow \dots$ が完全であるとは自然に誘導された群の準同型 $\dots \rightarrow \mathcal{A}_p \rightarrow \mathcal{B}_p \rightarrow \mathcal{C}_p \rightarrow \dots$ が完全であることをいう。

開集合 U に対し, $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ が単射ならば $f(U): \mathcal{A}(U) \rightarrow \mathcal{B}(U)$ も単射である (条件 b-1 から)。一方 f が全射であっても $f(U)$ が全射とは限らない。

例 円周 $X = S^1 = \{(\cos \theta, \sin \theta)\}$ を考えると, $0 \rightarrow \mathbb{R}_X \rightarrow \mathcal{D}_X^0 \xrightarrow{d} \mathcal{D}^1 \rightarrow 0$ は完全である。実際 d の (局所的) 逆写像は 1 次微分形式の積分によって得られる。しかしながら $\mathcal{D}^0(X) \rightarrow \mathcal{D}^1(X)$ は全射ではない。実際 f が X 上の C^∞ 関数ならば df の X 上の積分は 0 であり, $df = f(\theta)d\theta$ と書いたとき $f(\theta)$ のフーリエ展開は定数項を含まない。

一般に, X が n 次元の実多様体ならば外微分 d によって完全列

$$0 \rightarrow \mathbb{R}_X \rightarrow \mathcal{D}_X^0 \xrightarrow{d} \mathcal{D}_X^1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathcal{D}_X^n \rightarrow 0$$

が得られる (Poincaré の補題)。

また X が n 次元複素多様体ならば \mathcal{D}_X^{pq} を無限回微分可能な (p, q) 形式の層と $\bar{\partial}$ 作用素によって

$$0 \rightarrow \Omega_X^p \rightarrow \mathcal{D}_X^{p0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{D}_X^{p1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{D}_X^{pn} \rightarrow 0$$

が完全となる (Dolbeault の補題)。ただし Ω_X^p は正則な p 次数微分形式がつくる層である。

3.2. 層のコホモロジー

層に対しては層係数のコホモロジー理論がある。詳しくは述べないが、とりあえずは以下を記憶しておけばよい。

(0) X 上の層 \mathcal{A} と X の開集合 U に対してアーベル群の列 $H^i(U, \mathcal{A})$, $i = 0, 1, 2, \dots$ が定まり $H^0(U, \mathcal{A}) = \Gamma(U, \mathcal{A})$ 。

(1) 短完全列 $0 \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow 0$ があれば、長完全列

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H^0(U, \mathcal{A}) & \rightarrow & H^0(U, \mathcal{B}) & \rightarrow & H^0(U, \mathcal{C}) \\ & & \rightarrow & & \rightarrow & & \rightarrow \\ & & H^1(U, \mathcal{A}) & \rightarrow & H^1(U, \mathcal{B}) & \rightarrow & H^1(U, \mathcal{C}) \\ & & \rightarrow & & \rightarrow & & \rightarrow \\ & & H^2(U, \mathcal{A}) & \rightarrow & H^2(U, \mathcal{B}) & \rightarrow & H^2(U, \mathcal{C}) \\ & & \dots & & & & \end{array}$$

がある。

(2) \mathcal{A} が脆弱層(すべての U に対して ρ_{XU} が全射。 \mathcal{K} など)や柔軟層(1の分解ができる。 \mathcal{D}^{pq} など)であるときは、 $i > 0$ について $H^i(X, \mathcal{A}) = 0$ 。

(3) X がコンパクトな n 次元複素多様体(射影代数多様体など)で \mathcal{A} が接続層(\mathcal{A} は有限生成 \mathcal{O} 加群)ならば $H^i(X, \mathcal{A})$ は有限次元 \mathbb{C} ベクトル空間で、 $i > n$ なら $H^i(X, \mathcal{A}) = 0$ 。したがってこのとき \mathcal{A} のオイラー標数 Euler characteristic $\chi(X, \mathcal{A}) = \sum (-1)^i \dim H^i(X, \mathcal{A})$ が定義される。

練習問題 層係数コホモロジーについての上記性質と Poincaré の補題・Dolbeault の補題を組み合わせて以下の同型を証明せよ。

- (De Rham の定理) $i \geq 1$ のとき $H^i(U, \mathbb{R}_X) \simeq H^0(U, d\mathcal{D}_X^{i-1})/dH^0(U, \mathcal{D}_X^{i-1}) =$

(U 上の d 閉な i 次微分形式)/(U 上の完全な i 次微分形式)

- (Dolbeault の定理) $i \geq 1$ のとき $H^i(U, \Omega_X^p) \simeq H^0(U, \bar{\partial}\mathcal{D}_X^{p,i-1})/\bar{\partial}H^0(U, \mathcal{D}_X^{p,i-1})$

また X がコンパクトな複素多様体とし $0 \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow 0$ を接続層の短完全列とすると、 $\chi(X, \mathcal{B}) = \chi(X, \mathcal{A}) + \chi(X, \mathcal{C})$ であることを示せ。

3.2. 因子と可逆層

X を n 次元非特異代数多様体とする。 X の中の余次元 1 の(つまりは $n-1$ 次元の)一般には特異点をもつ部分多様体の整数係数の有限和を X の

因子という。すべての係数が0以上となる因子を有効因子という。また X 上の0でない有理関数 f は自然に主因子 (f) を定める。二つの因子は、その差が主因子であるときに線形同値であるといい、線形同値関係を \sim で表す。因子の線形同値類全体がつくる群を因子類群、あるいはピカル群といい、 $\text{Pic}(X)$ と表す。

因子 D が与えられたとき、 D に付随した可逆層 $\mathcal{O}_X(D)$ を

$$\text{開集合 } U \text{ に対して, } \Gamma(U, \mathcal{O}_X(D)) = \{U \text{ 上の有理型関数 } f; (f) + D|_U \geq 0\}$$

十分小さい U に制限すれば D は有理関数 g から定まっており、このとき $\Gamma(U, \mathcal{O}_X(D)) = (1/g)\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ である。つまり局所的には \mathcal{O}_X と同型な層である。このような層を可逆層 invertible sheaf あるいは直線束 line bundle という。

$\mathcal{O}_X(D)$ の定義を見ると、 1 はその有理切断である。逆に可逆層 \mathcal{L} とその有理切断 s が与えられていれば、 s の零点・極は因子 (s) を定める。この対応によって、 X 上の因子と有理切断付き可逆層（ただし切断については定数倍の差は無視する）とは同一視することができる。また因子の線形同値類は可逆層の同型類に対応し、ピカル群は有理切断をもつ可逆層の同型類全体と考えることができる。群演算に関しては因子の加法は可逆層のテンソル積に対応し、符号を変えることは双対をとることに対応している。

因子 D に対して、 D と線形同値な有効因子全体を D の完備線形系 $|D|$ と表す。上で見た因子と可逆層との対応を見ると、 D の線形同値な有効因子とは、 $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))$ の0でない元の定数倍を無視する同値類、すなわち射影空間 $\mathbb{P}(\Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))) = (\Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)) \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$ にほかならない。

例 $P = \mathbb{P}^n$ の超平面 $H : x_0 = 0$ をとれば、 $\Gamma(P, \mathcal{O}_P(H))$ は $1, x_1/x_0, \dots, x_n/x_0$ を基底とする $n+1$ 次元ベクトル空間であり、 x_0 を乗ずることによって x_0, x_1, \dots, x_n が基底とするベクトル空間と同型である。したがって $|H|$ は n 次元射影空間であり、もとの射影空間の双対射影空間 P^* とよばれる。 P の1点は $n+1$ 次元ベクトル空間 V の1次元部分空間と思ひ、1次関数 x_i は V の双対空間 V^* の元と考えると、 P^* の点は V^* の1次元線形部分空間、もしくは、同じことであるが、 V の余次元1の部分線形空間と考えることができる。

空でない完備線形系 $|D|$ があると、 X から射影空間（より具体的には射影空間 $|D|$ の双対射影空間）への有理写像 Φ_D が自然に定まるからである。実際、 $p \in X$ を一般にとれば、 $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))$ の元 α で p で0となるものは余次元1の部分線形空間、すなわち $|D|$ の双対射影空間の点が定まる。しかしながら p が特殊で、 $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))$ の元すべてが p で0となっていれば、

上記のような対応は意味をもたない。このような p を $|D|$ の底点 base point とよぶ。底点集合 $Bs |D|$ は X の閉集合であり, Φ_D は $X \setminus Bs |D|$ から射影空間への正則写像である。したがって $|D|$ が底点をもたなければ Φ_D は X 上で定義された正則写像である。そしてこの場合, D は射影空間の超平面因子 H の Φ_D による引き戻しとなる。 D が非常に豊富 very ample とは, $|D|$ が底点をもたず Φ_D が埋め込みとなることをいう。また適当な正の整数 m があって mD が非常に豊富になるとき, D は豊富 ample であるという。

3.3. 接続層の特性類

X を n 次元非特異代数多様体, D を因子とする。 D は X 中の超曲面 A_i の一次結合であるが, A_i は $2n$ 次元実多様体のなかの 2 次コホモロジー類を定め, したがってその 1 次結合である D も 2 次コホモロジー類 $[D] \in H^2(X, \mathbb{Z})$ が定まる。

D が定める可逆層 $\mathcal{O}_X(D)$ の第 1 チャン類 $c_1(\mathcal{O}_X(D))$ とは $[D]$ のことである。また全チャン類 $c(\mathcal{O}_X(D))$ を $1 + [D] \in H^0(X, \mathbb{Z}) \oplus H^2(X, \mathbb{Z})$ と定義する。

一般の接続層 \mathcal{A} に対しても, その全チャン類 $\in H^{2*}(X, \mathbb{Z}) = H^0(X, \mathbb{Z}) \oplus H^2(X, \mathbb{Z}) \oplus \cdots \oplus H^{2n}(X, \mathbb{Z})$ が定まって, 以下の性質をもつ。

- (1) 因子 D が定める可逆層 $\mathcal{O}_X(D)$ に対しては

$$c(\mathcal{O}_X(D)) = 1 + [D] \in H^0(X, \mathbb{Z}) \oplus H^2(X, \mathbb{Z})$$

- (2) 接続層の完全列 $0 \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow 0$ があれば

$$c(\mathcal{B}) = c(\mathcal{A})c(\mathcal{C})$$

全チャン類 $c(\mathcal{A})$ のうち $H^{2k}(X, \mathbb{Z})$ に属する部分を第 k チャン類といい, $c_k(\mathcal{A})$ と書く。

\mathcal{A} が階数 r の局所自由層でしかも $\Gamma(X, \mathcal{A})$ が十分多くの元をもっていると仮定する。 \mathcal{A} を局所的に \mathcal{O}_X^r と思えば, $a \in \Gamma(X, \mathcal{A})$ は r 個の正則関数 a_1, \dots, a_r の組と見なせる。そしてこれらを並べて得られる対角行列 $\text{Diag}(a_1(p), \dots, a_r(p))$ の階数 $\text{rank}_p a$ は局所自明化の取り方によらず, a と $p \in X$ だけで決まる。 a が一般ならば, $\text{rank}_p a = r - k$ となる p 全体 Y_k は X の中で余次元 s であって, $c_k(\mathcal{A})$ とは Y_k が定めるコホモロジー類 $[Y_k]$ に他ならない。

チャン類と似たものにチャン指標がある。接続層の \mathcal{A} のチャン指標 $\text{ch}(\mathcal{A})$ は $H^{2*}(X, \mathbb{Q})$ の元であって, 以下をみたすものである。

$$(1) \text{ch}(\mathcal{O}_X(D)) = \sum D^k/k!$$

$$(2) 0 \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow 0 \text{ が完全なら, } \text{ch}(\mathcal{B}) = \text{ch}(\mathcal{A}) + \text{ch}(\mathcal{C})$$

Hirzebruch が証明した一般次元のリーマン・ロッホ定理 Hirzebruch-Riemann-Roch Theorem は $\chi(X, \mathcal{A})$ を X の接束 T_X のチャン類 $c(X)$ と \mathcal{A} のチャン指標で表す公式である。

3.4. Serre 双対定理

X を非特異な n 次元射影代数多様体 (コンパクト複素多様体でもよい) とし, $\Omega_X^n = \mathcal{O}_X(K_X)$ を n 次微分形式の直線束 (標準束) とする。Dolbeault 定理を用いると $H^n(X, \mathcal{O}_X(K_X)) = (X \text{ 上の } (n, n) \text{ 形式})/d(X \text{ 上の } (n, n-1) \text{ 形式}) \simeq H^{2n}(X, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$ を示すことができる。対応は (n, n) 微分形式を X 上積分することによって得られる。

いま \mathcal{A} をベクトル束 (局所自由層) とし, \mathcal{A}^* をその双対ベクトル束とする。ふたたび Dolbeault の定理によって, $H^k(X, \mathcal{A}), H^{n-k}(X, \mathcal{A}^*(K_X))$ を \mathcal{A} に係数をもつ $(0, k)$ 微分形式および \mathcal{A}^* に係数をもつ $(n, n-k)$ 微分形式で表すことができる。この2つの積は $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^*$ に係数をもつ (n, n) 微分形式であり, \mathcal{A} と \mathcal{A}^* の間の標準的なペアリングと X 上の積分を組み合わせることによって, 自然な双線形写像 $H^k(X, \mathcal{A}) \times H^{n-k}(X, \mathcal{A}^*(K_X)) \rightarrow \mathbb{C}$ が得られる。Serre 双対定理はこの双線形写像が非退化ペアリングを与えるという結果である。特に $\dim H^k(X, \mathcal{A}) = \dim H^{n-k}(X, \mathcal{A}^*(K_X))$ が成立する。

$X = C$ が代数曲線, D が C の因子のときに Serre の双対定理を適用すると, $\dim H^1(C, \mathcal{O}_C(D)) = \dim H^0(C, \mathcal{O}_C(K_C - D)) = l(C, K_C - D)$ であるから, 曲線のリーマン・ロッホも一般のリーマン・ロッホと同じく $\chi(C, \mathcal{O}_C(D)) = \deg D - g + 1$ の形に書き換えることができる。

3.5. 複素多様体の変形

コンパクトな複素多様体が連続的に構造を変えていくことがある。たとえば楕円曲線 $C : y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$ は1次元のパラメータ λ をもっている。アーベル写像で C を複素トーラス $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau)$ と見なせば, 周期 τ が上半平面を自由に動いていくことになる。同様に, 種数 $g \geq 2$ の曲線は $3g-3$ 個のパラメータをもっていた。代数曲線の変形 / モジュライ理論はすでにリーマンが本質的な解答をもっていたわけであるが, 一般のコンパクト複素多様体に対する変形理論 deformation theory は小平 - Spencer によって創始され, 倉西によって局所理論が完成した。

X をコンパクトな複素多様体とする。また (B, o) を目印となる点 o をつけた (一般には非コンパクトな) 複素多様体とする。 (B, o) をパラメータ空

間とする X の変形とは、複素多様体間の正則な全射 $\pi : \mathcal{X} \rightarrow B$ であって、条件

- (1) π は平滑 smooth, すなわち π の微分 $d\pi$ の階数はいたるところ $\dim B$ と等しい(いいかえると, \mathcal{X} の各点 x の近傍は $\pi(x)$ の B 内の近傍とアフィン空間の点の近傍の直積と同型である)。
- (2) π は固有 proper, すなわち B の各点 b の逆像 $X_b = \pi^{-1}(b)$ (通常は p 上のファイバーとよぶ) はコンパクト。
- (3) $X = X_0$ 。

変形が自明であるとは、 \mathcal{X} が X と B の直積となっていることをいう。
 $\pi : \mathcal{X} \rightarrow B$ を X の変形とすれば、次のような自然な層完全列がある。

$$0 \rightarrow T_X \rightarrow T_{\mathcal{X}}|_X \rightarrow \pi^* T_B|_X \rightarrow 0$$

対応するコホモロジーの完全列をとれば B の o における接空間から $H^1(X, T_X)$ への写像を得る。これを小平 -Spencer 写像 Kodaira-Spencer map という。基本的な結果は小平 - Spencer および倉西による以下の結果である。

- (1) \mathcal{X} が $X = X_0$ の近くで自明になることと、小平 -Spencer 写像が 0 となることは同値である。とくに $H^1(X, T_X) = 0$ ならば、 X の小さな変形はすべて自明である。
- (2) $H^2(X, T_X) = 0$ ならば、小平 - Spencer 写像が同型となるような変形 $\pi : \mathcal{X} \rightarrow B$ が存在する。
- (3) 複素空間 $H^1(X, T_X)$ の原点 0 の近傍に含まれる (一般には特異点をもつ) 複素解析空間 S および X を含む解析空間からの固有正則写像 (倉西族 Kuranishi family) $\varpi : \mathcal{F} \rightarrow S$ があって、 X の十分小さい変形 $\mathcal{X} \rightarrow B$ はすべて倉西族から得られる。

練習問題 変形に関する上の結果を用いて、曲線の倉西族のパラメータ空間 S の次元が 0 ($g = 0$), 1 ($g = 1$), $3g - 3$ ($g \geq 2$) であることを示せ。

4 複素曲面

2次元の複素多様体を複素曲面 complex surface という。通常はコンパクトを仮定する。前節で説明した基本的概念をもちいて、小平先生が展開した複素曲面理論のエッセンスを説明する。

4.1. 因子, 交点数

複素曲面 S の因子 divisor とは, S 中の複素曲線の整数係数有限和 $D = \sum m_i C_i$ のことである。 S 上の有理型関数 $f \neq 0$ の零点集合や極集合は曲線であるから, 曲線の場合と同様に主因子 (f) を定める。 $D - D'$ が主因子のとき D と D' は線形同値といて, $D \sim D'$ と書き, 因子の線形同値類全体 (因子類群, あるいはピカル群) を $\text{Pic}(S)$ と書くことも, 同様である。

S 中の曲線 C_1, C_2 を相異なる曲線とすると, $C_1 \cap C_2$ は有限個の点である。(適当な重複度をつけて数えた) 共通点の個数を $C_1 C_2$ で表し, C_1, C_2 の交点数 intersection number と呼ぶ。正確には, C_1, C_2 が p で交わっていて, 局所的に C_i が正則関数の零点 $f_i = 0$ と書いていけば, C_1, C_2 の p における局所交点数を $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[x, y]] / (f_1, f_2)$ と定め, 交点数は局所交点数の和として定義する。局所交点数が1である点を正規交差 normal crossing という。このとき局所座標 x, y を適当にとれば二つの曲線は局所的に $x = 0, y = 0$ である。 p が C_1, C_2 の特異点であったり, C_1, C_2 が p で接したりすれば, 局所交点数は2以上になる。この定義から, C_1 が非特異ならば, $C_1 C_2$ は因子 C_2 の C_1 への制限の次数と等しいことがわかる。(一般には C_1 は特異点をもつが, その場合は C_1 の非特異モデルへの C_2 の引き戻しの次数である)。したがって $C_2 \sim C'_2$ ならば $C_1 C_2 = C_1 C'_2$ が成り立つ。位相幾何的には, S を向きづけられた4次元実多様体, C_i を2次元のコサイクルと思ったとき, $C_1 C_2$ はカップ積 $C_1 \cup C_2 \in H^4(S, \mathbb{Z})$ が基本サイクル $[S]$ でとる値である。以上の定義から明らかのように, 相異なる既約曲線 C_1, C_2 に対しては常に $C_1 C_2 \geq 0$ であり, 等号が成立することと $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ は同等である。

曲線 C が因子として2つの曲線 $C_1, C_2 \neq C$ の差 $C_1 - C_2$ と線形同値ならば, C の自己交点数 self intersection number C^2 を $C^2 = C C_1 - C C_2$ として定義する。曲線上の主因子の次数が0であることから, この値は C_1, C_2 の取り方に依存しない。これを用いると, 任意の2つの曲線に対して交点数が定義され, 線形に延長することによって, 因子全体が作る群やピカル群に整数値の交点形式が定まる。

既約曲線 C の自己交点数 C^2 は負になることもある。しかしながら $C^2 \geq 0$ である場合は, どんな曲線 C' に対しても $C C' \geq 0$ である (S 上の因子 D がどんな曲線 C' に対しても $D C' \geq 0$ をみたすとき, D はネフ nef であるという。したがって自己交点数が0以上の既約曲線と線形同値な因子はネフ因子である)。

S を小さい開集合 U_i で覆うと, 因子 D の U_i への制限は U_i 上の有理型関数 f_i が定める因子 (f_i) として表現できる。このとき U_i 上で高々 D に沿って極をもつ関数全体 $\Gamma(U_i, \mathcal{O}(D))$ と U_i 上の正則関数全体は対応 $\varphi \mapsto f_i \varphi$ に

よって同型であり, 可逆層 (直線束 line bundle ともいう) である。たとえば, 正則な 2 次微分形式の層は可逆層 (直線束) である。有理 2 次微分形式 $\omega = \omega(x, y)dx \wedge dy$ が定める因子の線形同値類を標準因子 canonical divisor という。

例 \mathbb{P}^2 の有理 2 形式 $(dx/x) \wedge (dy/y)$ の極は 3 本の直線 $x = 0, y = 0, z = 0$ であり, $\mathcal{O}(-3)$ である。

4.2. 複素曲面上のリーマン・ロッホ定理

S を複素曲面, D を S 上の因子, K_S を S の標準因子とすると, 等式

$$\chi(S, \mathcal{O}_S(D)) = \chi(S, \mathcal{O}) + \frac{D(D - K_S)}{2}$$

が成立する。これを可逆層 (直線束) $\mathcal{O}_S(D)$ に対するリーマン・ロッホの定理という。

D の自己交点数 D^2 が正であれば, m を大きな整数として,

$$\chi(S, \mathcal{O}(mD)) = \frac{D^2}{2}m^2 + O(m)$$

が成立し, Serre 双対定理を考慮すると, mD あるいは $K_S - mD$ のいずれかは 0 でない有効因子 C と線形同値になる。特に S が入っている射影空間の超平面因子を S へ制限した因子を H とすれば, $HC > 0$ であり, したがって $DH > 0$ ($mD \sim C$ の場合), あるいは $DH < 0$ ($K_S - mD \sim C$ の場合) が成立する。いいかえれば, $DH = 0$ ならば必然的に $D^2 \leq 0$ である。この考察から S の因子が生成する $H^2(S, \mathbb{Z})/(\text{torsion})$ の部分格子 $\text{NS}(S)$ (カップ積が誘導する非退化ペアリング付きの自由アーベル群) の符号は $(1, \text{rank NS}(S) - 1)$ と等しい (Hodge の指数定理 Hodge index theorem)。

一般の連接層 \mathcal{A} に対するリーマン・ロッホ定理は $\chi(S, \mathcal{A})$ を \mathcal{A} のチャン指標で書く公式

$$\chi(S, \mathcal{A}) = \text{ch}_0(\mathcal{A})\chi(S, \mathcal{O}) - \frac{\text{ch}_1(\mathcal{A})K_S}{2} + \text{ch}_2(\mathcal{A})$$

である。 \mathcal{A} が階数 r の局所自由層 (ベクトル束) の場合は, $\text{ch}_0(\mathcal{A}) = \text{rank } \mathcal{A}$, $\text{ch}_1(\mathcal{A}) = c_1(\mathcal{A}) = [\det \mathcal{A}]$, $\text{ch}_2(\mathcal{A}) = (1/2)c_1^2(\mathcal{A}) - c_2(\mathcal{A})$ であり, \mathcal{A} が曲線 $C \subset S$ に台をもつ連接層 $\mathcal{O}_C(\delta)$. $\delta \in \text{Pic}(C)$ なら, $\text{ch}_0(\mathcal{A}) = 0$, $\text{ch}_1(\mathcal{A}) = [C] = c_1(\mathcal{A})$, $\text{ch}_2(\mathcal{A}) = -(1/2)C^2 + \deg \delta$, また \mathcal{A} が一点に台をもつ摩天楼層 skyscraper sheaf \mathcal{O}_S/I なら, $\text{ch}_0(\mathcal{A}) = 0$, $\text{ch}_1(\mathcal{A}) = c_1(\mathcal{A}) = 0$, $\text{ch}_2(\mathcal{A}) = -c_2(\mathcal{A}) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A}$ である。

また Noether の公式は、リーマン・ロッホに現れた $\chi(S, \mathcal{O})$ を S の接束 T_S のチャーン類 $c_i(S)$ を用いて書く公式

$$\chi(S, \mathcal{O}) = \frac{c_1(S)^2 + c_2(S)}{12}$$

である。ここで出てきた2つのチャーン数 $c_1^2(S) = K_S^2$, $c_2(S)$ は S の解析的な不変量であるが、実は次の2つの定理から、向きの入った4次元実多様体 S が定める位相不変量になる。

- (1) (Leftshetz 不動点定理) $c_2(S)$ は S のオイラー数 $e(S) = \sum (-1)^i b_i(S) = 2 - 2b_1(S) + b_2(S)$ と等しい。
- (2) (Atiyah-Singer 指数定理) $H^2(S, \mathbb{Z})$ にカップ積が誘導する非退化2次形式の符号を (b_+, b_-) とすると、

$$b_+ - b_- = \frac{c_1^2(S) - 2c_2(S)}{3}.$$

$H^2(S, \mathbb{Z})/(\text{torsion})$ の2次形式は4次元実多様体の重要な不変量である。特に S が単連結である場合は、Friedman の定理により、この2次形式(の同値類)が S の位相構造を完全に決定する。

4.3. 爆発と爆縮, 極小モデル

リーマン面(複素曲線)と複素曲面(あるいは一般次元の複素多様体)の違いはいろいろあるが、もっとも根本的な差は、同型類と双有理同値類が異なることである。

たとえば定数以外には有理型関数をもたない複素曲面が無数にある。したがって関数体からは多様体の情報が復元できない。そこで複素曲面では双有理同値よりもきつい双有理型同値という条件を導入する。 $f: S \rightarrow T$ が双有理型写像であるとは、 S の有限個の点を除いて定義されている正則写像であり、また T の一般の点 t の逆像は1点しかないことをいう。しかしそう定義しなおしても、次のようにして双有理型同値ではあるが同型ではない曲面の組を構成することができる。

複素曲面 S の1点 p をとり、 p を原点とする局所座標 x, y をとる。局所的に S を座標平面 $\{(x, y)\}$ と同一視し、 $S \times \mathbb{P}^1 = \{(x, y), (s:t)\}$ の中で $xt = ys$ で定義される閉部分集合 \tilde{S} を考える。この方程式は $(x, y) \neq (0, 0)$ ならば $(s:t) = (x:y)$ と同等であるが、 $(x, y) = (0, 0)$ のときは $(s:t)$ は任意の値をとることができる。したがって、自然な射影 $\pi: \tilde{S} \rightarrow S$ は p 以外の

点 $\in S$ の上では同型であるが, $E_p = \pi^{-1}(p) \simeq \mathbb{P}^1$ である。このようにして構成される $\pi: \tilde{S} = \text{Bl}_p(S) \rightarrow S$ を p における S の爆発 blowing up という。また E_p は例外曲線 exceptional curve と呼ばれる。

S 上の有理型関数は $\text{Bl}_p(S)$ 上の関数と見なすことができる。逆に $\text{Bl}_p(S)$ 上の有理型関数は $S \setminus \{p\}$ 上の有理型関数であるが, Hartogs の定理によって自然に S 上まで延長することができる。したがって $\text{Bl}_p(S)$ の関数体は S の関数体と同じであり, π は同型でない双有理写像である。

例外曲線 E_p の近くでは, $\text{Bl}_p(S)$ を 2 枚の座標近傍で覆うことができる。すなわち $\{(x, y), (1 : t) ; y = tx\}$ および $\{(x, y), (s : 1) ; x = sy\}$ である。 E_p はそれぞれの近傍で $x = 0$ あるいは $y = 0$ で定義される。 p で正規交差で交わる 2 つの曲線 C_1, C_2 を考えると, $\pi^*C_i = \tilde{C}_i + E_p$ の形となり, $\tilde{C}_1\tilde{C}_2 = C_1C_2 - 1$ となる (すなわち \tilde{C}_1 と \tilde{C}_2 は E_p の近くでは交わらない)。このことから $E_p^2 = -1$ であることがわかる。

位相的には $\text{Bl}_p(S)$ は 4 次元実多様体 S と射影平面 \mathbb{P}^2 の向き付けを逆にした 4 次元実多様体 $\bar{\mathbb{P}}^2$ とを貼り合わせてできる多様体 (連結和) であり, 基本群や (位相的) コホモロジー群に関しては

$$\pi_1(\text{Bl}_p(S)) \simeq \pi_1(S), \quad H^*(\text{Bl}_p(S), \mathbb{Z}) = H^*(S, \mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}E_p$$

が成り立つ。

複素面上の曲線 E が自己交点数 -1 をち \mathbb{P}^1 と同型であるとき E を (-1) 曲線と呼ぶ。爆発の例外曲線は (-1) 曲線であるが, じつは逆も成立する。すなわち複素曲面 \tilde{S} 上の曲線 E が \mathbb{P}^1 と同型で $E^2 = -1$ を満たしていれば, 双有理正則写像 $\pi: \tilde{S} \rightarrow S$ が存在して $\pi(E)$ は一点 p であり, π は p における爆発と一致する (Castelnuovo の判定法)。また曲面の間の双有理な正則写像 $f: X' \rightarrow X$ はいくつかの爆発を合成した写像である。

S から見た π を爆発 blowing up といったが, \tilde{S} から見たときは爆縮 blowing down と呼ぶ。爆縮によって第 2 ベッチ数は 1 だけ減少する。したがって与えられた非特異代数曲面から爆縮を無限回繰り返すことはできず, 有限回の爆縮を行えば, もう (-1) 曲線を一本も含まない曲面, すなわち相対極小モデル relatively minimal model に到達する。爆発によっては曲面の性質は本質的に変わらないので, 複素曲面の研究はその相対極小モデルの研究に帰着する。

4.4. Adjunction formula と Castelnuovo の定理

S を複素曲面, $C \subset S$ を非特異な (既約) 曲線とする。 C の点 p の近傍を考え, C は局所座標の 1 個 y の零点集合として書けているとする。 p の近傍における S の一次微分形式全体を Ω_S , C の一次微分形式を Ω_C とする

と、自然な制限写像 $\Omega_S \rightarrow \Omega_S|_C$ および $\Omega_S|_{\text{vert}_C} \rightarrow \Omega_C$ が対応 $\alpha(x, y)dx + \beta(x, y)dy \mapsto \alpha(x, 0)dx + \beta(x, 0)dy \mapsto \alpha(x, 0)dx$ によって定まる。第2の写像の核は $\beta(x, 0)dy$ の形の元からなり、 C の S における余法束と呼ばれる。その有理切断が定める因子を計算してみると、 S 上の因子 $-C$ を C に制限したものと一致することがわかる。特に次数は $-C^2$ である。また Ω_S の行列式の2回外積を計算してみると、 $K_S|_C = K_C - C|_C$ 、すなわち $K_C = (K_S + C)|_C$ を得る（一般に複素多様体 X 中の非特異な超曲面 Y に対して、 $K_Y = (K_X + Y)|_Y$ が成立する）。この式を adjunction formula と呼ぶ。 K_C の次数は偶数で -2 以上であるから、 S が相対極小（ (-1) 曲線がない）で $K_S C < 0$ ならば $C^2 \geq 0$ が成立する。

一般の（既約）曲線 $C \subset S$ は有限個の特異点をもつ。このときも C の双対化因子 K_C を $K_S + C|_C$ で定義する。 C の一点 p での爆発 $\pi_p : X_1 = \text{Bl}_p(S) \rightarrow S = S_0$ をとると、 $\pi_p^{-1}(C) = m_p E_p + C_1$ と書ける。ここで C_1 は C と双有理な曲線（ C の strict transform）であり、 $m_p = m_p(C)$ は C の p における重複度であって、 $m_p > 1$ であることと p が C の特異点であることは同値である。このとき C_1 の双対化因子 $K_{C_1} = (K_{X_1} + C_1)|_{C_1}$ は C の双対化因子の引き戻しから $m_p E_p$ の制限を引いたものに等しい： $K_{C_1} = \pi^* K_C - m_p E_p|_{C_1}$ 。とくに $\deg K_{C_1} = \deg K_C - m_p(m_p - 1)$ が成立する。このことから、次のことが従う。

- (1) $\deg K_C$ は -2 以上の偶数であり、 -2 となることと C が非特異で \mathbb{P}^1 に同型であることは同値である。
- (2) C の特異点で爆発を行うことによってその strict transform の双対因子の次数は減少する。したがって爆発を有限回繰り返すことによって C の非特異モデルが得られる。

以上のような結果をもとに、Csstelnovo は相対極モデル S の構造について次のような結果を証明した。

非特異代数曲面 S が (-1) 曲線を含まないとき、次の3つの場合のうちのただ一つが成立する。

- a) $S \simeq \mathbb{P}^2$ （射影平面）
- b) 非特異代数曲線 C と正則な全射 $f : S \rightarrow C$ があり、すべての点 $p \in C$ に対して $f^{-1}(p) \simeq \mathbb{P}^1$ （射影直線束）
- c) 標準因子 K_S はネフ、すなわちどんな曲線 $C \subset S$ に対しても $K_S C \geq 0$ （絶対極小モデル）

絶対極小モデルは、曲面の双有理型同値類のなかの最小元である。すなわち、 \tilde{S} を非特異な複素曲面とし、 S は \tilde{S} と双有理型同値な絶対極小モデルとすると、双有理写像 $f: \tilde{S} \rightarrow S$ があって、 f は爆縮の合成である。

Castelnuovo の定理を証明するには、 K_S がネフでないと仮定して、(a)、(b) のいずれかがおこることを示す。このとき $K_S C < 0$ となる既約曲線 C があるが、前に見たように $C^2 \geq 0$ であり、 C はネフである。因子の列 $C, C+K_S, C+2K_S, \dots$ を考えると C との交点数は減少していくので、ある非負整数 m があって、 $C+mK_S$ は有効因子 D と線形同値であるが $C+(m+1)K_S$ は有効因子と同値ではない。 D の既約成分 Γ をひとつとると、仮定と Serre 双対より、 $H^0(X, \mathcal{O}_S(\Gamma + K_S)) = H^2(X, \mathcal{O}_S(\Gamma + K_S)) = 0$ を得る。

ここで $H^1(S, \mathcal{O}_S(K_S)) = 0$ の場合を考え、完全列

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S(K_S) \rightarrow \mathcal{O}_S(K_S + \Gamma) \rightarrow \mathcal{O}_\Gamma(K_\Gamma) \rightarrow 0$$

から得られるコホモロジー完全列を見ると、 $\Gamma \simeq \mathbb{P}^1$ であり、 $\dim H^0(S, \mathcal{O}_S(\Gamma))$ は $\Gamma^2 = 1, K_S \Gamma = -3$ のとき 3、 $\Gamma^2 = 0, K_S \Gamma = -2$ のとき 2 がわかる。前者ならば (a) の場合 $(S, \Gamma) \simeq (\mathbb{P}^2, H)$ であり、後者ならば (b) になる。

また $H^1(S, \mathcal{O}_S(K_S)) \neq 0$ (Serre 双対より $H^1(S, \mathcal{O}_S) \neq 0$ と同値である) ならば S からリーマン面への写像があることが簡単に証明できて、(b) が起きることがわかる。

上の (b) の構造をもつ曲面を線織曲面 ruled surface という。線織面は底曲線 C と \mathbb{P}^1 の直積と双有理型同値である。 C の種数 g が 0 のとき S は \mathbb{P}^2 と双有理型同値 (有理曲面) であり、 $g \geq 1$ ならば有理曲面ではない。

4.5. エンリケスと小平の曲面分類理論

複素曲面の双有理同値類を分類する場合、重要なことは双有理変換によっては変化しない量、すなわち双有理不変量を見つけることである。双有理不変量としては、基本群や第 1 ベッチ数などさまざまなものがあるが、代数曲面だけをあつかった Enriques は多重種数 Plurigenera と補助的に不正則数 irregularity を選んだ。それに対して代数的でない複素曲面もあつかった小平は、第 1 ベッチ数と幾何種数および第 1 Chern 類に着目した。

代数曲面 S の標準因子を K_S で表す。 m を正の整数としたとき、 $P_m(S) = \dim H^0(S, \mathcal{O}_S(mK_S))$ を S の m 重種数 m -genus とよぶ。ただし $P_1(S)$ は通常 $p_g(S)$ と書き、幾何種数と呼ばれる。 $P_m(S)$ が双有理型不変量であることは簡単にわかる。また $q(S) = \dim H^1(S, \mathcal{O}_S)$ を不正則数 irregularity とよぶ。 S が代数的であれば $q(S) = \dim H^0(S, \Omega_S^1)$ であり、 $2q(S)$ は S の第 1 ベッチ数 $b_1(S)$ と等しい。 $q(S)$ や $b_1(S)$ 双有理型不変量である。 S が代数的でない場合は少し複雑になり、 $b_1(S) = q(S) + \dim H^0(S, \Omega_S^1)$ 、 $\dim H^0(S, \Omega_S^1) = q(S)$ または $= q(S) - 1$ が成立する。

Enriques による相対極小な代数曲面 S の「分類」は以下のようなものである。

- ($-\infty$) すべての $m > 0$ に対して $P_m = 0$: S は線織曲面に双有理同値。
- (0) すべての m に対して $P_m \leq 1$ である $m > 0$ に対して $P_m = 1$
 - (0-1) $P_1 = 1, q = 2$: アーベル多様体。複素多様体としては複素トーラス \mathbb{C}^2/Λ 。 $K_S \simeq 0$
 - (0-2) $P_1 = 1, q = 0$: K3 曲面。 $K_S \simeq 0$ 。
 - (0-1*) $P_1 = 0, q = 1$: アーベル多様体の有限群による商。 P_4 あるいは P_6 は 1。 $4K_S$ または $6K_S \sim 0$ 。
 - (0-2*) $P_1 = 0, P_2 = 1, q = 0$: K3 曲面の $\mathbb{Z}/(2)$ による商。 Enriques 曲面。 $2K_S \sim 0$ 。
- (1) $P_m = O(m)$: ある $m > 0$ に対して、 $|mK_S|$ は底点をもたず、 Φ_{mK_S} は S から代数曲線 B への全射を定めて、その一般のファイバーは種数 1 の非特異曲線（楕円曲面）。とくに mK_S は B の因子の引き戻しになっている（ただし K_S そのものが B の因子から来るとは限らない）。
- (2) $P_m = O(m^2)$: 十分大きな m に対しては $|mK_S|$ は底点をもたず、 Φ_{mK_S} は双有理正則写像（一般型曲面）。

この「分類」は、曲線の場合と比較するときわめて不完全である。（ $-\infty$ ）や（0-1）、（0-1*）については問題ないが、K3 曲面（およびその商空間である Enriques 曲面）が位相的にどういう構造をもっているのかわからないし、楕円曲面についての情報も茫漠としている。そして一般型曲面についてはほとんど何も情報がない。K3 曲面や楕円曲面の構造を理解するためには、代数曲面のカテゴリーを複素曲面に広げて考える必要があり、それを実行したのは小平であった。

また小平による『分類』は以下の通りである。ローマ数字の下についている添字 0 は、極小曲面の分類であることを示すもので、それほど深い意味はない。

- I₀: b_1 は偶数, $p_g = 0$. すべて代数曲面
- II₀: $b_1 = 0, p_g = 1, c_1 = 0$: K3 曲面
- III₀: $b_1 = 4, p_g = 1, c_1 = 0$: 複素トーラス

IV_0 : b_1 は偶数 , $p_g > 0$, $c_1 \neq 0$, $c_1^2 = 0$: すべて楕円曲面

V_0 : b_1 は偶数 , $p_g > 0$, $c_1^2 > 0$: すべて一般型代数曲面

VI_0 : b_1 奇数 , $p_g > 0$, $c_1^2 = 0$: すべて楕円曲面

VII_0 : $b_1 = 1$, $p_g = 0$.

小平の分類理論を使うと,

- (a) すべての複素解析的 K3 曲面は変形でつながっており, とくに \mathbb{P}^3 内の非特異 4 次曲面と微分同相である。変形の空間のうち代数的な K3 曲面全体は可算個の超曲面の和集合になっている。
- (b) 適当に底曲線をその分岐被覆で置き換えると, 楕円曲面は関数不変量とホモロジー不変量という 2 つのデータで変形同値類が完全に決まり, 基本群などの位相不変量はすべて計算できる (たとえば基本群は底曲線の基本群 $\pi_1(B)$ と \mathbb{Z}^2 の直和, または有限巡回群による $\pi_1(B)$ の拡大である)。変形空間は上の 2 つのデータを用いたコホモロジー類の空間と一致し, 代数的な楕円曲面は稠密ではあるが測度 0 の部分集合 (絶対値 1 の複素数のなかの 1 のべき根全体と似ている) になっている。

ことが示される。代数曲面だけではなくコンパクトな複素曲面全体を考察する小平理論によって, Enriques の理論は (一般型曲面および非代数的な VII_0 曲面を除いて) 実質的な分類表になったのである。