東京大学大学院数理科学研究科　　グローバル COE プログラム
公開講座　　「数学新展開の研究教育拠点 」
図形をみる　―空間の可視化と幾何化―　　2008 年 11 月 22 日

「構造をみる」

空間の構造をグラフィックスによって理解する試み

坪井　俊

地球の形，宇宙の形

宇宙の形を考えることは，昔から心躍ることだったに違いない．この地面が，地球という球体をなしていることを人類が理解したのは２０００年以上前のことである．エラトステネス (276BC–194BC) は，自然数の表から，倍数を順に消していって，素数を残すエラトステネスの篩で名前が残っているが，地球の大きさもに考えている．伝えられているところでは，夏至の南中時の太陽の高さを，アレクサンドリアとアスワンで測り，２地点の距離から地球の半径を求めている．

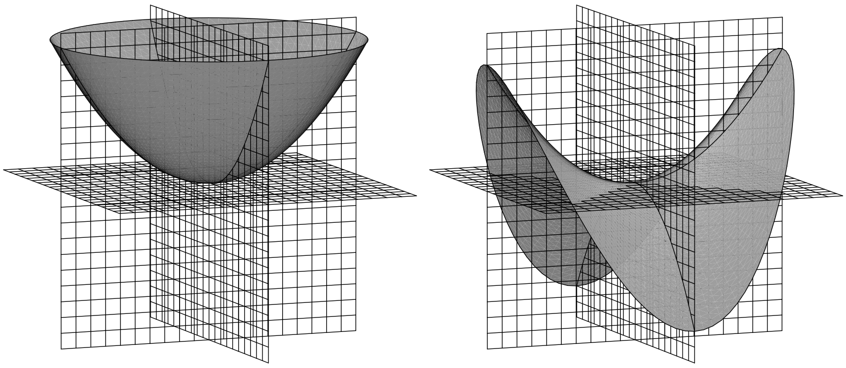
宇宙は，１４０億年前のビッグバンから始まっていると考えられている．その始まりがどのようであったかは，数理科学研究科の河野俊丈先生，神保道夫先生も参加されているＩPMU（数物連携宇宙研究機構）の主要研究テーマのひとつということである．宇宙には，曲がっているところがあることは，重力レンズという現象から明らかになっている．宇宙の始まりは，１点と考えて良いほど小さかったと考えられている．その形はわかっていないが，非常に興味のある問題である．

形の理解

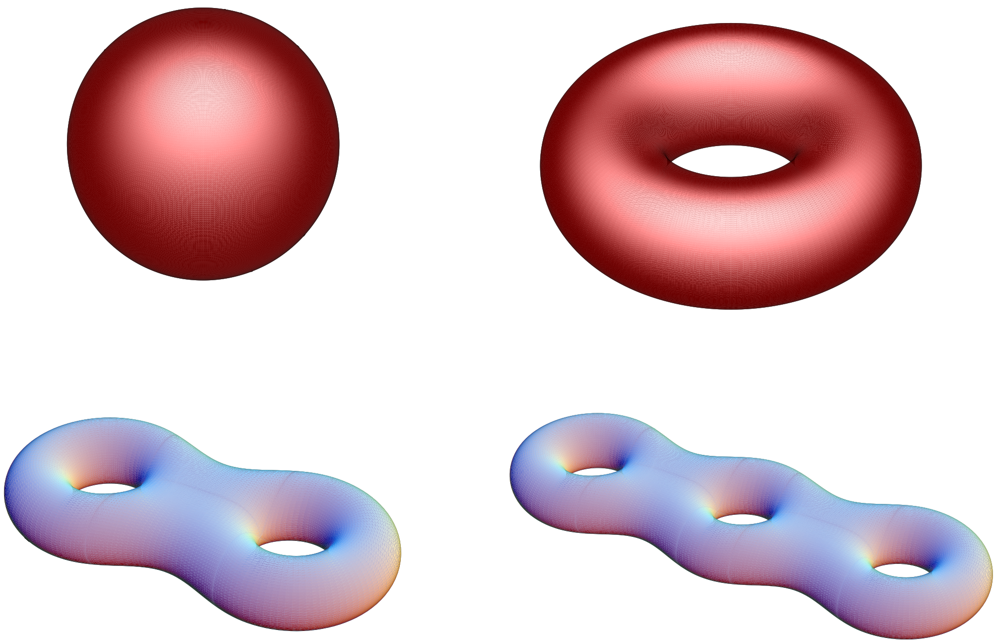
形を構造とともに理解するためには，さまざまなモデルを考えてそれを十分理解することが必要である．この講座では，このようなモデルとその視覚的な理解の仕方をいくつか紹介していきたい．

曲率

曲がり方という意味では，数学的には，正に曲がっている球面のような空間，曲がっていないトーラスのような空間，負に曲がっているもっと複雑な空間と３種類のモデルがある．モデルという意味は，いたるところ同じ曲がり方をしているという理想的な状態を考えているという意味である．



負に曲がっている（有限的な＝コンパクトな）空間は正に曲がっている空間，負に曲がっている空間と非常に異なっている．つまり，球面やトーラスは，回転できるが，負に曲がっているコンパクトな空間は，回転できない．つまり，回転対称性を持ち得ない．曲がり方は，空間の対称性に直接関係している．



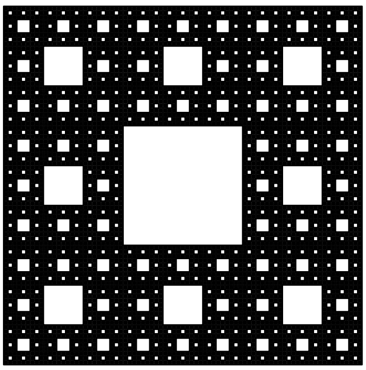
ガウス (1777 – 1855) という数学の天才は，空間の曲がり方である曲率を定式化している．ガウスは，現実の宇宙がどのように曲がっているか，実験によって明らかにするために，離れた３地点を結ぶ三角形の内角の和が１８０度になるか測ったといわれている．

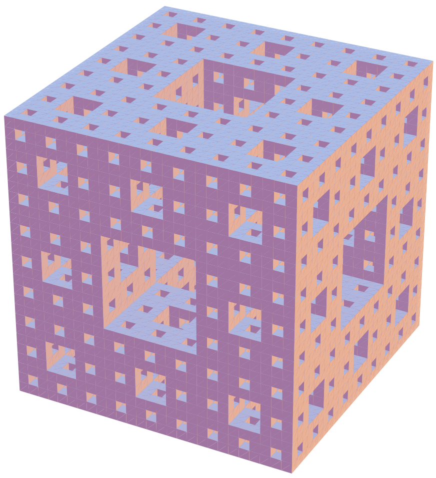
現在，宇宙が曲がっているのは，アインシュタイン (1879 – 1955) の相対性理論の効果と考えられている．実際に直進する光が重力により空間が曲げられて，曲がって進んでいるというようにみられている．

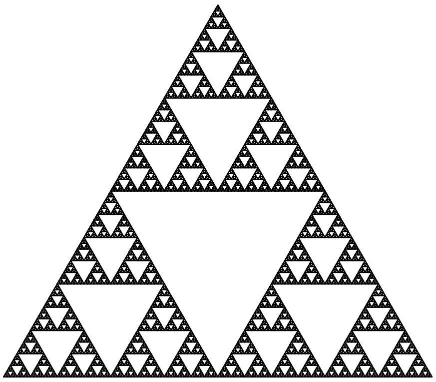
実際の宇宙では，光の速さと宇宙の膨張の速さの関係で，容易には観測されないが，宇宙の形が球面のような空間であれば，不思議な現象がみられるはずである．それは，宇宙空間で遠ざかる物体をみるとわかる．

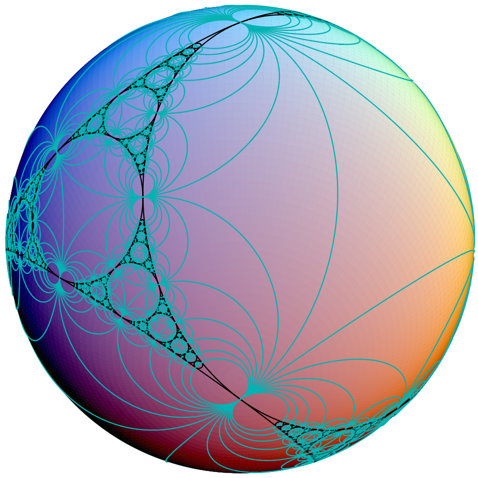
網目構造

宇宙の構造を考えると，宇宙における物質の分布は，網のようになっているという観測もある．網のような空間をモデル化したものとしては，メンガー曲線というものがある．これは，カントール集合，シェルピンスキー・カーペット，という空間の一族である．メンガー曲線は，ユークリッド空間に埋め込まれた形で理解されていると思うが，空間自体としては連結な多様体と同様に，任意の２点に対し，一方を他方に写す空間全体の同相写像があるという意味で，等質な空間である．





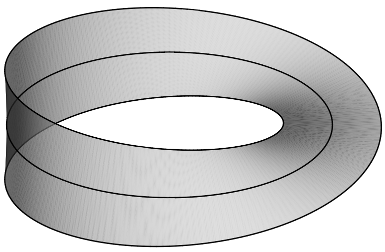


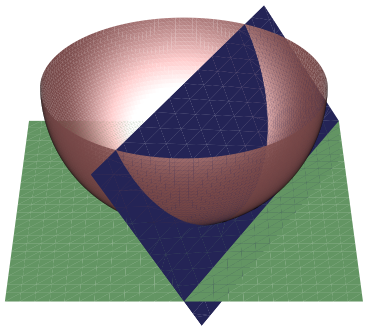


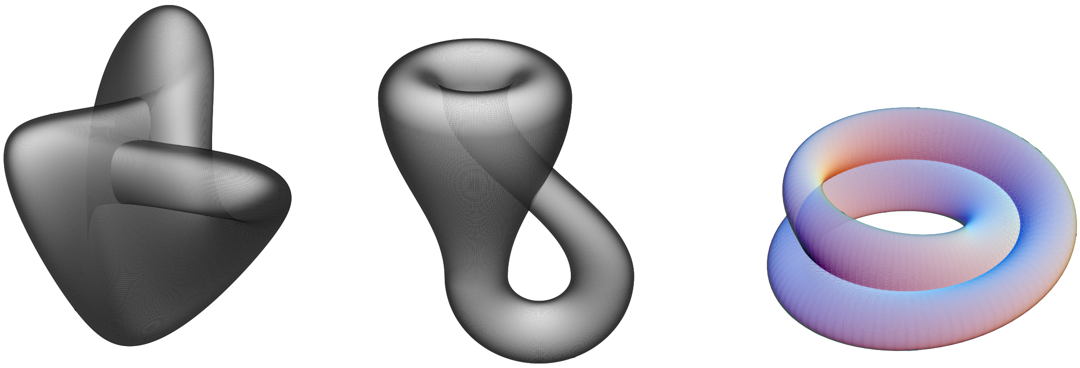
回転する空間

空間に自然な回転がある時，空間は円周の和集合にとして表される．固定される点がある時には，平面上の同心円が層状に積み重なった形をしている．

２次元の時を考えると，円周の和集合は，リボンのようになるが，円柱面のようになる場合と，メビウスの帯のようになる場合がある．また，回転に固定点があれば，その周りでは，同心円になる．２次元のコンパクトな回転する図形は，このようなリボンと同心円の描かれた円板を貼り合せて得られる図形であるから，球面，射影平面，トーラス，クラインの壷の４種類となる．





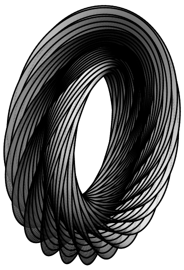


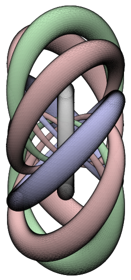
　球面と射影平面は，正に曲がった図形，トーラス，クラインの壷は平らな図形である．種数が２以上の向き付けを持つ曲面は，負に曲がった曲面で，回転しない．

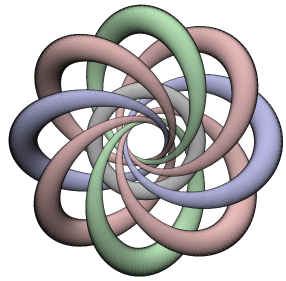
　宇宙空間がもともと回転していたかどうかは不明であるが，回転できるコンパクトな３次元多様体はザイフェルト (1907–1976) により研究が始められ，現在ではその構造は良く解っていて，分類されている．ザイフェルト多様体と呼ぶ．固定点があれば，同心円の描かれた円板を重ねた形であり，固定点ではない点においては，ねじったソリッド・トーラスまたは，メビウスの帯を重ねた形になる．

ホップ・ファイブレーション

　３次元球面の回転は，３次元球面のホップ・ファイブレーションと呼ばれる構造をあたえる．これは，３次元球面から，２次元のリーマン球面への写像で，数式では，$(z_1, z_2) \longmapsto \dfrac{z_1}{z_2}$ で表される．ここで，z_1, z_2 は複素数 $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$ で，${x_1}^2 + {y_1}^2 + {x_2}^2 + {y_2}^2 = 1$ を満たしており，実４次元空間の原点からの距離が１の３次元球面上の点を表す．$\dfrac{z_1}{z_2}$ は，複素数および無限遠点 ∞ からなるリーマン球面の点を表すとする．長さ１の複素数 $e^{\theta i} = \cos\theta + i\sin\theta$ について，(z_1, z_2) に対し $(e^{\theta i} z_1, e^{\theta i} z_2)$ を考えると，この点は，リーマン球面の同じ点 $\dfrac{z_1}{z_2}$ に写る．また，$\dfrac{z_1}{z_2}$ に写る点は，$(e^{\theta i} z_1, e^{\theta i} z_2)$ と表される．$\dfrac{z_1}{z_2}$ に写る点の全体は，３次元球面における円周となる．３次元球面が円周の束になるということがわかるが，これはホップ (1894 – 1971) により発見されたものである．この長さ１の複素数 $e^{\theta i} = \cos\theta + i\sin\theta$ の全体は，群 $U(1)$ をなす．$U(1)$ は複素数平面 $\boldsymbol{C} = \{z = x + yi \mid x,\ y \in \boldsymbol{R}\}$ に回転として作用しているが，３次元球面にも，それぞれの座標への回転として作用している．この回転は，３次元球面のすべての点を同じ距離だけ移動する．

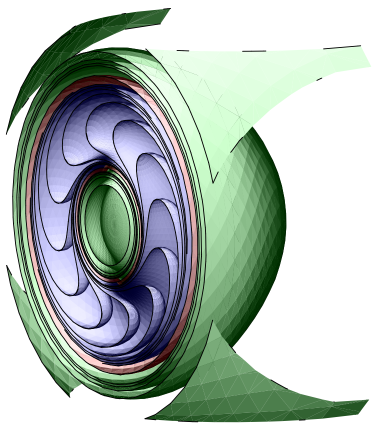


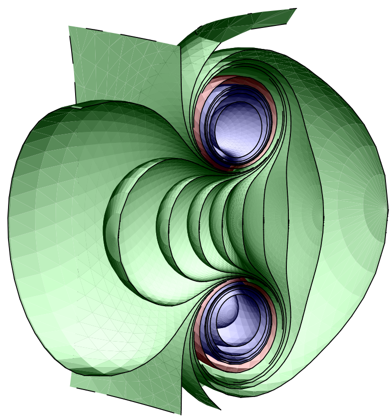




葉層構造

空間が，層に分かれている状態を理想化したものは，葉層構造と呼ばれる．これは，局所的には，曲面が交わらないで積み重なっている状態である．曲面は大域的には非常に複雑になり得る．３次元トーラス T^3 は，３次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ を平行６面体を基本領域とするように $\boldsymbol{Z}^3$ の作用で割ったものである．３次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ の平行な平面の族は，３次元トーラス T^3 を曲面（平面，円柱，トーラス）の族に分割している．３次元球面が葉層構造をもつことは，レーブ (1920–1993) により発見された．非常にきれいな形の３次元球面の分割である．





構造の可視化

数学で扱う空間の構造は，可視化しにくいものばかりであるが，このようなモデル空間の視覚化から少しずつでも感覚的に把握できるようになることを期待している．