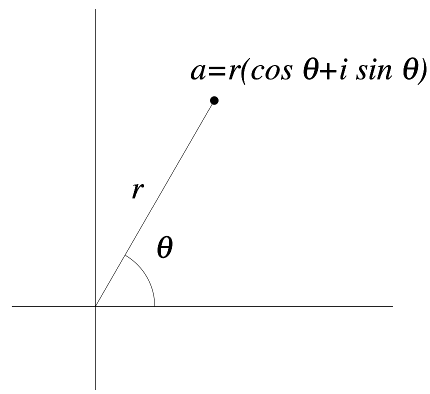
代数学の基本定理

辻　雄（Takeshi TSUJI)

1　代数学の基本定理とは

1.1　複素数の積と極表示

0 でない複素数 a は必ず，正の実数 r と実数 θ を用いて，



$$a = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

の形にかけます（右図参照）．特に θ を $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲に制限すれば，この表示は一通りに決まります．２つの複素数 a_1, a_2 の表示 $a_i = r_i(\cos\theta_i + i\sin\theta_i)$ $(r_i > 0)$ をとり，積を計算してみると，

$$\begin{aligned}
a_1a_2 &= r_1r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
&= r_1r_2\{(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)\} \\
&= r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\}
\end{aligned}$$

という表示が得られます．特に $a = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ $(r > 0)$ に対し $b = r^{-1}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$ とおくと，

$$ab = 1 \cdot (\cos 0 + i\sin 0) = 1$$

となります．この b を a^{-1} で表し，a の逆数と呼びます．また a のべき乗を計算すると，

$$a^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

となることが分かります．

1.2　２次方程式，３次方程式

実数係数の２次方程式

$$x^2 + ax + b = 0 \iff \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - b, \qquad (a, b \text{ は実数定数})$$

は，判別式 $D = a^2 - 4b$ が負のとき実数の根を持ちませんが，複素数の世界では，この場合も

$$-\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2}i$$

という根を持ちます．a, b を複素数にしても，$\beta^2 = \dfrac{a^2}{4} - b$ となる複素数 β が必ずとれて（1.5 参照），$-\dfrac{a}{2} \pm \beta$ が根となります．例えば $a = -1, b = 1 + i$ のとき，$\dfrac{a^2}{4} - b = -\dfrac{3}{4} - i$ は $\beta = \dfrac{1}{2} - i$ という平方根をもち，$-\dfrac{a}{2} \pm \beta = 1 - i, i$ が根となります．

複素数係数の 3 次方程式の場合も，複素数の平方根，3 乗根が必ず存在すること（1.5 参照）を用いて根を求める公式 (カルダノの公式，前の講演参照）が知られています．それでは 4 次あるいは，より高次の場合はどうなるかという問題に対する一つの答えが，次の代数学の基本定理です．

1.3　定理（代数学の基本定理）

複素数係数の n 次方程式

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\text{は複素数定数})$$

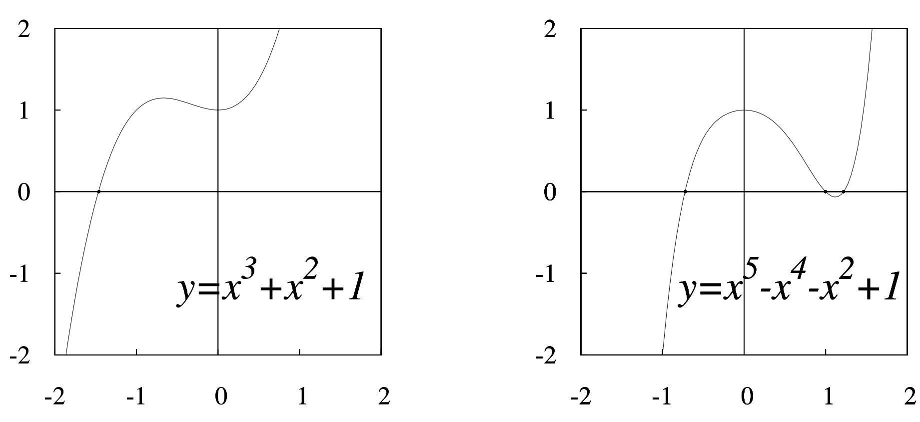
は必ず複素数に根を持つ．

1.4　奇数次実数係数の場合

n が奇数で係数 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ が実数の場合，次のようにして少なくとも一つ実数の根を持つことがわかります．

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

とおきます．実数 x の絶対値 $|x|$ が非常に大きくなると，$f(x)$ の $n-1$ 次以下の項は x^n に比べて遥かに小さくなり，$f(x)$ の挙動は x^n の挙動で決まります．そのため，十分大きな x では $f(x)$ は正に，$|x|$ が十分大きな負の数 x では $f(x)$ は負となり，$y = f(x)$ のグラフから間に $f(\alpha) = 0$ となる実数 α があることが分かります（下図参照）．間にこのような α があることは，厳密には連続関数の中間値の定理と呼ばれる定理から従います．



1.5　複素数のべき乗根

複素数係数の $x^n - a = 0$ という形の方程式は次のようにして必ず根を持つことが分かります．

$a=0$ の場合は，$x=0$ が根となります．

$a\neq 0$ の場合は，$a=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0, 0\leq\theta<2\pi)$ の形にかき, $r=s^n$ となる正の実数 s をとり，

$$b=s\left(\cos\left(\frac{\theta}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{n}\right)\right)$$

とおけば，1.1 の最後に述べたことから，

$$b^n=s^n\left(\cos\left(\frac{\theta}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{n}\right)\right)^n=r(\cos\theta+i\sin\theta)=a$$

となります．

$n=2$ のとき，$a=p+qi$ (p, q は実数) の平方根を三角関数の半角公式を使って求めてみると，次のようになります．

$$q\geq 0 \text{ のとき，}\quad \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{p^2+q^2}+p}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{p^2+q^2}-p}{2}}\,i\right),$$

$$q<0 \text{ のとき，}\quad \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{p^2+q^2}+p}{2}}-\sqrt{\frac{\sqrt{p^2+q^2}-p}{2}}\,i\right)$$

1.6 Abel（アーベル）の定理

2 次方程式，3 次方程式は平方根，3 乗根を用いて根を求める方法があることは 1.2 で述べました．より高次の場合にも同じようにべき乗根を用いて根を求める方法が見つかれば，定理 1.3 は証明できることになりますが，残念ながらこの方法で根を求められるのは 4 次方程式までで，5 次以上では次の否定的な結果が知られています．

定理 (Abel) $n\geq 5$ の場合，一般には n 次方程式の根を方程式の係数から加減乗除とべき根をとる操作のみを用いて求めることはできない．

この定理は 1826 年の論文で Abel により証明されました．

1.7 根の個数

定理 1.3 を用いると，複素数係数の n 次多項式

$$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

は必ず

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)\quad(\alpha_1,\ldots,\alpha_n \text{は複素数})$$

と 1 次式の積に因数分解できることを，次のように示すことができます．

証明 定理から $f(\alpha_1)=0$ となる複素数 α_1 が存在する．多項式 $f(x)$ を 1 次式 $x-\alpha_1$ で割って，$f(x)=f_1(x)(x-\alpha_1)+r$ ($f_1(x)$ は $n-1$ 次多項式, r は複素数) とかける．α_1 を代入して両辺を比較すれば $r=0$，つまり $f(x)=f_1(x)(x-\alpha_1)$ となる．$f_1(x)$ に同じ議論を適用すれば，$f_1(x)=f_2(x)(x-\alpha_2)$, ($f_2(x)$ は $n-2$ 次式，α_2 は複素数）とかける．この操作を繰り返していけば，上のような分解が得られる． □

$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ は明らかに $f(x) = 0$ の根になりますが，根はこれしかないことも次のように示されます．従って $f(x) = 0$ の根の個数は高々n 個となります．

証明 背理法で示す．今 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ とは異なる複素数 β に対して $f(\beta) = 0$ となったとする．上の分解式に代入すると，$(\beta - \alpha_1)(\beta - \alpha_2) \cdots (\beta - \alpha_n) = 0$ となる．両辺に $(\beta - \alpha_1)^{-1} \cdots (\beta - \alpha_n)^{-1}$（0 でない複素数は必ず逆数を持つことが重要!）をかけると $1 = 0$ となって矛盾． □

2 歴史

歴史については，文献 [1] 第 4 章に詳しく論じられています．ここではこの文献をもとにざっと概観してみることにします．１８世紀から１９世紀にかけて代数学の基本定理の証明についての論文を書いた数学者として Euler (オイラー, 1707-1783)，D'Alembert (ダランベール, 1717-1783)，Lagrange (ラグランジュ, 1736-1813)，Laplace (ラプラス, 1749-1827)，Argand (1768-1822)，Gauss (ガウス, 1777-1855)，Cauchy (コーシー, 1789-1857) が挙げられています．論文が書かれた順にならべてみると表のようになります．

1746	D'Alembert
1749	Euler
1772	Lagrange
1795	Laplace
1799	Gauss 第 1 証明
1814	Argand
1816	Gauss 第 2, 3 証明
1820	Cauchy
1849	Gauss 第 4 証明

1.7 の最初に述べた主張を，実数係数の多項式に適用すると「実数係数の多項式は 1 次と 2 次の実数係数の多項式の積に分解する」ことが導かれます．逆にこの主張から 1.7 の最初に述べた主張を導くこともできます．この実数係数の多項式の分解についての主張は，証明は与えられていないが，Euler の 1742 年の Goldbach 宛の手紙で言及されているそうです．証明の手法をみてみると，

- $|f(z)|$ の最小化を考える証明

D'Alembert → Argand → Cauchy

- 代数的な証明．

Euler→ Lagrange → Laplace, Gauss の第 2 証明

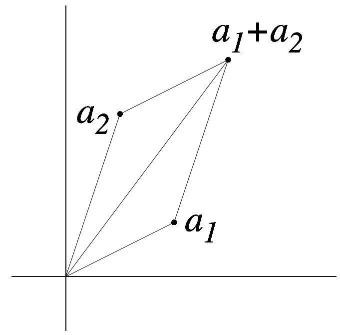
の大きく２つの系統があります．Gauss のその他の証明は幾何的なものです．

現在のように代数学, 解析学，幾何学が発展していない状況で証明を試みているため，証明に不完全な部分があるのは避けがたく，一方で現代の数学の視点で解釈しなおせば証明が成立しているという面もあり,「誰が最初に証明したか？」という問いに答えるのは難しいようです．それでも文献 [1] によれば,「ガウスの第 2 証明は—今日の規準でも—完全に正しい」そうです．

現在では，多くの代数学の基本定理の証明が知られています（[1]，[2] 参照）．以下ではその中から 4 つの証明（の方針）を紹介しようと思います．

3　幾何的証明

3.1　複素数の絶対値　複素数 $a = p + qi$ (p, q は実数) に対して，複素平面上での 0 と a の距離 $\sqrt{p^2+q^2}$ を a の絶対値とよび，$|a|$ で表します．複素数 a_1, a_2 に対して次の不等式 (三角不等式と呼ばれる) が成り立ちます．



$$|a_1 + a_2| \leq |a_1| + |a_2|$$

また 1.1 のように $a = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ $(r > 0)$ という表示をとると $|a| = \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = r$ となります．従って 1.1 での積，逆数の計算より

$$|a_1 a_2| = |a_1||a_2|, \qquad |a^{-1}| = |a|^{-1}$$

となることが分かります．

3.2　$|z|$ の大きさによる挙動の違い　$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \cdots + a_1 z + a_0$ とおきます．$a_0 = 0$ のときは $z = 0$ という根があるので，以後 $a_0 \neq 0$ と仮定します．$|z|$ がとても大きいときと，$|z|$ がとても小さいときの $f(z)$ の振る舞いの違いに着目します．

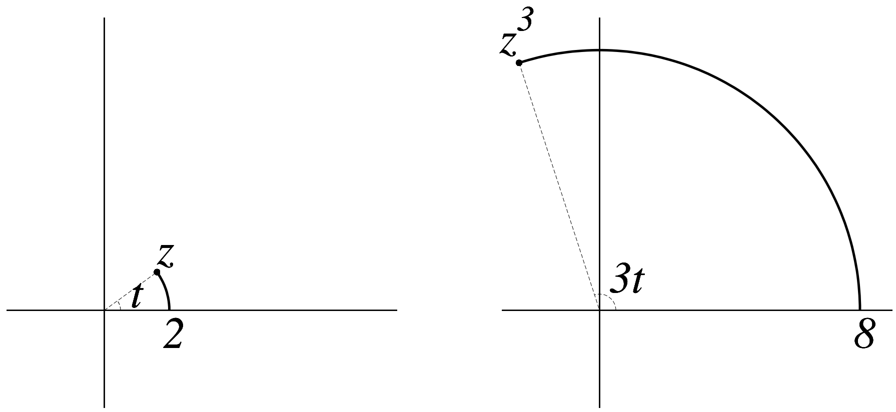
　$|z|$ がとても大きいとき，$|a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \cdots + a_1 z + a_0|$ は $|z^n| = |z|^n$ に比べてはるかに小さくなります．$f(z) = z^n\{1 + (a_{n-1}z^{-1} + a_{n-2}z^{-2} + \cdots + a_1 z^{-n+1} + a_0 z^{-n})\}$ と書き直したとき，$\{\,\}$ の中は 1 にとても近いと言うこともできます．従って，この場合 $f(z)$ の挙動は z^n の挙動に支配されます．

　一方 $|z|$ がとても小さいときは，$|z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \cdots + a_1 z|$ は a_0 に比べてはるかに小さくなります．従って，このときは $f(z)$ は a_0 にとても近い値をとります．

3.3　z^n のふるまい　z を複素平面上の 0 を中心とする半径 r の円上を r から出発して一周させる，すなわち $z = r(\cos t + i\sin t)$ とおいて，t を 0 から 2π まで動かしてみましょう．すると

$$z^n = r^n(\cos t + i\sin t)^n = r^n(\cos(nt) + i\sin(nt))$$

となり nt は 0 から $2n\pi$ まで動くことから，z^n は複数平面上で 0 を中心とする半径 r^n の円上を r^n から出発して n 周することが分かります．$n = 3$, $r = 2$ のとき下図のようになります．



3.4 証明 3.2 と 3.3 の考察から，十分大きな r をとり z を 0 を中心とする半径 r の円上を r から出発して一周させると，$w = f(z)$ は

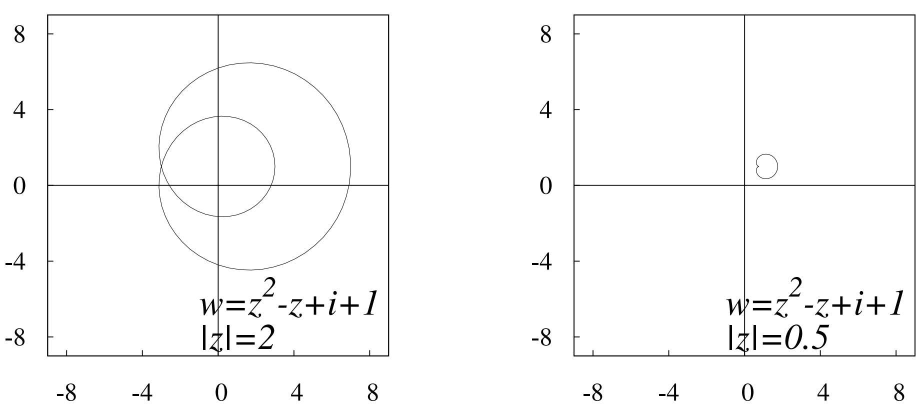
「0 のまわりを n 周する」$\cdots(*)$

ことが分かります．例えば $f(z) = z^2 - z + 1 + i$, $r = 2$ のときは下図のようになります．

一方，とても小さい r をとり，同じように z を 0 を中心とする半径 r の円上を r から出発して一周させると，$w = f(z)$ は，

「a_0 の近くを動くだけになり，0 の周りを回らない」$\cdots(**)$

ことが分かります．上と同じ例で $r = 0.5$ とすると下図のようになります．



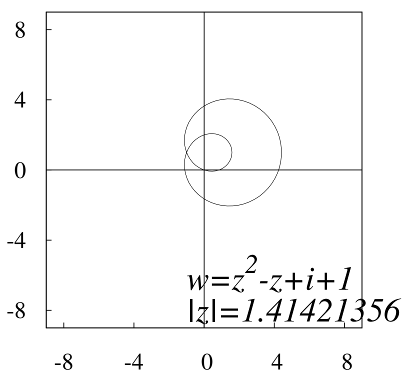
大きな r から r を徐々に小さくしていったときに，$(*)$ の状態から $(**)$ の状態にうつるためには，途中のある実数 r_0 においては，

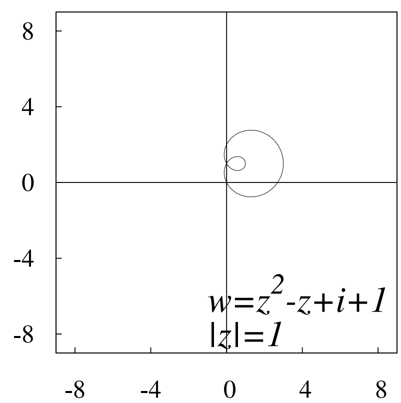
「z を 0 を中心とする半径 r_0 の円上を動かしたとき，$w = f(z)$ は 0 を通る」

すなわち

「$|\alpha| = r_0$ となる複素数 α で $f(\alpha) = 0$ となるものが存在する」

と思われます．例えば $f(z) = z^2 - z + 1 + i$ の場合は，$r = \sqrt{2}$, $r = 1$ のときに下図のように 0 を通ります．($f(z) = 0$ の根は $1 - i$ と i です．1.2 参照.)





以上の考察は非常に感覚的なものですが，この考え方を厳密にして代数学の基本定理を証明することができます．

4 D'Alembert, Argand, Cauchy の方法

$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ を複素数係数の n 次多項式とします．$n \geq 1$ とします．

4.1 定理 次の性質をみたす複素数 c が存在する．

「すべての複素数 z に対して $|f(z)| \geq |f(c)|$ が成り立つ」

4.2 定理 複素数 z_0 に対して $f(z_0) \neq 0$ なら，$|f(z_1)| < |f(z_0)|$ をみたす複素数 z_1 が存在する．

4.3 代数学の基本定理はこの２つの定理から，次のように直ちに従います．c を定理 4.1 のようにとります．もし $f(c) \neq 0$ となったとすると，定理 4.2 より $|f(c')| < |f(c)|$ となる複素数 c' が存在し，c の性質に矛盾します．従って $f(c) = 0$ となります．

4.4 定理 4.1 の証明について §3 で述べた議論により，$|z|$ が大きいときは，$f(z)$ の振る舞いは z^n に支配され，そのため十分大きな正の実数 R をとると $|z| > R$ では，常に $|f(z)| > |f(0)| = |a_0|$ となることが示せます．このことから，$|c| \leq R$ をみたす複素数 c で，

「$|z| \leq R$ をみたす，すべての複素数 z に対して $|f(z)| \geq |f(c)|$ が成り立つ」

となるものが存在することを示せば十分です．実際，このような c がとれれば，$|z| > R$ となる複素数 z についても $|f(z)| > |f(0)| \geq |f(c)|$ となります．(0 は $|0| \leq R$ をみたすことに注意.)

z を半径 R の円盤内 $\{z; |z| \leq R\}$ に制限してしまえば，$|f(z)|$ は，確かにどこかで最小値を取りそうに思えてきますが，これは

「複素平面上のあるコンパクト集合上で定義された連続関数は必ず最小値をもつ」

という一般的な定理から従います．$\{z; |z| \leq R\}$ はコンパクト集合，$|f(z)|$ はその上の連続関数となっています．

4.5　定理 4.2 の証明

$w = z - z_0 \Leftrightarrow z = z_0 + w$ とおくと，$f(z) = f(z_0 + w)$ は

$$f(z_0 + w) = b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + \cdots + b_{n-1} w^{n-1} + b_n w^n$$

と w の多項式に展開できます．$b_n = 1$ です．$w = 0$ を代入すると $b_0 = f(z_0)$ となることも分かります．$b_1, b_2, \ldots$ のうち 0 とならない最初のものを b_k とすると，$f(z_0) \neq 0$ なので，上の展開式をさらに，

$$f(z_0 + w) = f(z_0)\{1 + cw^k(1 + c_1 w + \cdots + c_{n-k} w^{n-k})\}, \qquad c \neq 0$$

と変形することがきます．$-1/c$ の k 乗根 d を一つとり（1.5 参照），$w = dt$ とおくと

$$\begin{aligned} f(z_0 + dt) &= f(z_0)\{1 + cd^k t^k (1 + c_1 dt + \cdots + c_{n-k} d^{n-k} t^{n-k})\} \\ &= f(z_0)\{1 - t^k - t^k (c_1 dt + \cdots + c_{n-k} d^{n-k} t^{n-k})\} \end{aligned}$$

となります．ここで $0 < t < 1$ をみたす実数 t で十分小さなものをとれば

$$|c_1 dt + \cdots + c_{n-k} d^{n-k} t^{n-k}| < \frac{1}{2}$$

となるようにできます．この t について

$$\begin{aligned} |f(z_0 + dt)| &= |f(z_0)| \cdot |1 - t^k - t^k (c_1 dt + \cdots + c_{n-k} d^{n-k} t^{n-k})| \\ &\leq |f(z_0)| \cdot \{(1 - t^k) + t^k |c_1 dt + \cdots + c_{n-k} d^{n-k} t^{n-k}|) \\ &\leq |f(z_0)| \cdot \left(1 - t^k + \frac{1}{2} t^k\right) = |f(z_0)| \cdot \left(1 - \frac{1}{2} t^k\right) < |f(z_0)| \end{aligned}$$

となります．一つ目の不等式は複素数の三角不等式

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

を $z_1 = 1 - t^k$ と $z_2 = -t^k (c_1 dt + \cdots)$ に適用することで得られます．

5　代数的証明

5.1　複素数の和と積の性質　複素数のもつ代数的性質を整理してみましょう．複素数には実数と同じように足し算（和）とかけ算（積）が定義されています．また $0, 1$ という特別な数があることも注意しておきます．まず足し算は，

$$(x+y)+z = x+(y+z), \quad x+y = y+x, \quad x+0 = x$$

という性質をみたし, また

どんな複素数 x に対しても $x+x'=0$ となる複素数がとれます.

実際 $x' = -x$ とおけばよいです．かけ算は

$$(xy)z = x(yz), \quad xy = yx, \quad 1 \cdot x = x$$

をみたし，さらに 1.1 でみたように

0 以外のどんな複素数 x に対しても $xy = 1$ となる複素数 y がとれます.

最後に足し算とかけ算の間には

$$(x+y)z = xz + yz$$

という関係があります．有理数がこれらの性質を満たすことは，みなさんも小学校以来なじみがあると思いますし，実数でもこれらの性質をあまり強く意識することなく使ってきたと思います．これらの性質が複素数でも成り立っているというわけです.

5.2　「体」という概念　現代の数学では，ある集合 K に足し算，かけ算が定義され，さらに $0, 1$ （ただし $0 \neq 1$）という特別な K の元があって，上で述べたような性質をすべてみたしているとき，K は体であるとよばれています．今まで有理数や実数，複素数で考えてきた n 次方程式は，一般に体で同様な議論ができることが分かっています.

話が少しそれてしまいますが，例えば素数 p を一つとって，$\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ という p 個の整数からなる集合 F に $+_p$, $\times_p$ という演算を $a +_p b =$($a+b$ を p で割った余り), $a \times_p b =$($a \times b$ を p で割った余り) で定めると，F は体になることが知られています．$p = 5$ のとき，$+_5$, $\times_5$ を表にすると次のようになります．このような体でも方程式の理論が展開できるというわけです.

$+_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\times_5$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

5.3　体と方程式の根　体 K と K に係数をもつ多項式 $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ が与えられたとき，体 K を含むような（一般にはより大きな）体 L で，L の中では $f(x)$ が $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$ と分解するものが存在することが知られています．この事実を複素数係数の多項式 $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ $(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}$ は複素数) に適用すると，複素数全体のなす体（$\mathbb{C}$ で表す）を含む体 L で，L の中では $f(x)$ が $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$ と分解するものがとれることが分かります．

Euler, Lagrange, Laplace らの証明ではこのような分解を「仮想的に」認めて議論していた点が，Gauss の学位論文（第 1 証明の論文）では非難されていたようです．現代の体論を用いれば，この仮想的な分解は，上に述べた事実により正当化されます．

5.4　複素共役　複素数 $a=p+qi$（p,q は実数）に対して，i の係数の符号をかえて得られる複素数 $p-qi$ を a の複素共役とよび $\overline{a}$ で表します．$-i$ も i と同じく $(-i)^2=-1$ をみたすことから，

$$\overline{a_1+a_2}=\overline{a_1}+\overline{a_2},\quad \overline{a_1\cdot a_2}=\overline{a_1}\cdot\overline{a_2} \tag{$*$}$$

となることが分かります．また複素数 a が実数となるためには $\overline{a}=a$ となることが必要十分です．

複素数係数の多項式 $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ に対し，その係数をすべて複素共役でおきかえて得られる多項式を $\overline{f}(x)$ で表します．明らかに $\overline{\overline{f}}(x)=f(x)$ が成り立ちます．また $(*)$ より $\overline{f+g}=\overline{f}+\overline{g}$, $\overline{f\cdot g}=\overline{f}\cdot\overline{g}$ となることが分かります．複素数 α が $f(x)=0$ の根ならば，$\overline{\alpha}$ は $\overline{f}(x)=0$ の根となります．実際

$$\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0=0$$

の複素共役をとると，$(*)$ より

$$\overline{\alpha}^n+\overline{a_{n-1}}\,\overline{\alpha}^{n-1}+\cdots+\overline{a_1}\,\overline{\alpha}+\overline{a_0}=0$$

が得られます．

5.5　証明　$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ を複素数係数の n 次多項式とするとき，$\overline{\overline{f}\cdot f}=\overline{\overline{f}}\cdot\overline{f}=f\cdot\overline{f}$ より，$f(x)\overline{f}(x)$ は実数係数の $2n$ 次多項式になります．もし $f(x)\overline{f}(x)=0$ が複素数の根 α を持てば $f(\alpha)\overline{f}(\alpha)=0$ となり，$f(\alpha)=0$ なら α が，$\overline{f}(\alpha)=0$ ならば $\overline{\alpha}$ が，$f(x)=0$ の根となります．従って実数係数の場合に定理 1.3 を証明すればよいことが分かります．

以下では $f(x)$ は実数係数であるとします．$n=2^km$ (m は奇数) とかき，k についての帰納法で証明します．$k=0$ のときは，1.4 より実数の根が存在します．$k\geq 1$ とし，$k-1$ のときは定理が成り立っているとします．すると 5.3 に述べたことから，$\mathbb{C}$ を含むある体 L で $f(x)$ は

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$$

と一次式の積に分解します．実数 c を一つとり

$$g_c(x) = \prod_{1 \le r < s \le n} (x - \alpha_r - \alpha_s - c\alpha_r\alpha_s)$$

とおきます．多項式 $g_c(x)$ の係数はアプリオリには L に入っていますが，対称式の一般論から $g_c(x)$ の係数は $a_0, \ldots, a_{n-1}$ の実数係数の多項式の形でかけることが分かり（詳しくは5.6参照），特に $g_c(x)$ の係数は実数となります．$g_c(x)$ の次数は $\frac{1}{2}n(n-1) = 2^{k-1}m(2^k m - 1)$ ですから，帰納法の仮定により $g_c(x) = 0$ は実根をもちます．1.7の議論により，その根は $\alpha_r + \alpha_s - c\alpha_r\alpha_s$ のいずれかです．すなわち，どんな実数 c についても，ある自然数の組 (r, s) $(1 \le r < s \le n)$ に対して $\alpha_r + \alpha_s - c\alpha_r\alpha_s$ が実数となることがいえました．(r, s) の取り方は有限個しかないので，ある (r, s) については，$\alpha_r + \alpha_s - c\alpha_r\alpha_s$ が実数となる c が無限個あることになります．このような (r, s) に対しては，$\alpha_r + \alpha_s$, $\alpha_r\alpha_s$ も実数となります．実際，2つの異なる実数 c_1, c_2 に対して，

$$\beta_1 = \alpha_r + \alpha_s - c_1\alpha_r\alpha_s, \quad \beta_2 = \alpha_r + \alpha_s - c_2\alpha_r\alpha_s$$

が実数となったとすると，

$$\alpha_r + \alpha_s = (c_2\beta_1 - c_1\beta_2)(c_2 - c_1)^{-1}, \quad \alpha_r\alpha_s = (\beta_1 - \beta_2)(c_2 - c_1)^{-1}$$

とかけ右辺は実数となります．従って α_r, α_s は実数係数の2次方程式 $x^2 - (\alpha_r + \alpha_s)x + \alpha_r\alpha_s = 0$ の根となります．実数係数の2次方程式はかならず複素数に根を持つことから（1.2参照），1.7の議論により α_r, α_s は複素数であることが分かります．以上により $f(x)$ は複素数の根を持つことが示されました．

5.6　対称式　K を体とします．(5.5では実数全体のなす体の場合を用います．）K に係数をもつ n 変数 $t_1, t_2, \ldots, t_n$ の多項式 $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ がどの2つの変数を入れかえても変わらないとき，すなわち $1 \le r < s \le n$ をみたすどの2つの整数 r, s についても

$$f(t_1, \ldots, t_r, \ldots, t_s, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_s, \ldots, t_r, \ldots, t_n)$$

が成り立っているとき，$f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ は対称式であるといいます．例えば $n = 2$ のとき，$(t_1)^2 t_2 + t_1(t_2)^2$ は対称式です．また $n = 3$ のとき，$(t_1)^2 + (t_2)^2 + (t_3)^2$ は対称式です．

$$(X - t_1)(X - t_2) \cdots (X - t_n) \tag{$\sharp$}$$

を X の多項式と思って

$$X^n - s_1(t_1, \ldots, t_n)X^{n-1} + s_2(t_1, \ldots, t_n)X^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1}s_{n-1}(t_1, \ldots, t_n)X + (-1)^n s_n(t_1, \ldots, t_n)$$

と展開すると，係数に n 個の多項式 $s_m(t_1, \ldots, t_n)$ $(1 \le m \le n)$ があらわれます．

$$s_1(t_1, \ldots, t_n) = t_1 + t_2 + \cdots + t_n, \quad s_n(t_1, \ldots, t_n) = t_1 t_2 \cdots t_n$$

がすぐに分かります．上で展開した多項式 (♯) は $t_1, t_2, \ldots, t_n$ のどの２つを入れかえても変わりません．従って係数 $s_m(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ $(1 \leq m \leq n)$ も変数 $t_1, t_2, \ldots, t_n$ のどの２つを入れかえても変わりません．つまりこれらは対称式となります．この n 個の対称式を（n 変数の）基本対称式とよびます．

$n = 2$ のとき，$s_1(t_1, t_2) = t_1 + t_2$, $s_2(t_1, t_2) = t_1 t_2$.

$n = 3$ のとき，$s_1(t_1, t_2, t_3) = t_1 + t_2 + t_3$, $s_2(t_1, t_2, t_3) = t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3$, $s_3(t_1, t_2, t_3) = t_1t_2t_3$ となります．一般の n でも，具体的に

$$s_m(t_1, t_2 \ldots, t_n) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n} t_{i_1} t_{i_2} \cdots t_{i_m}$$

と 書くことができます．5.5 の証明では次の定理を使っています．

定理 K 係数の n 変数の対称式 $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ は，必ず基本対称式 $s_m(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ $(1 \leq m \leq n)$ の K 係数多項式の形に書くことができる．

例えば,

$$\begin{aligned}(t_1)^2 t_2 + t_1 (t_2)^2 &= t_1 t_2 (t_1 + t_2) = s_2(t_1, t_2) s_1(t_1, t_2), \\ (t_1)^2 + (t_2)^2 + (t_3)^2 &= (t_1 + t_2 + t_3)^2 - 2t_1t_2 - 2t_2t_3 - 2t_1t_3 = s_1(t_1, t_2, t_3)^2 - 2s_2(t_1, t_2, t_3)\end{aligned}$$

となります．

c を実数定数として，x, $t_1, \ldots, t_n$ を変数とする多項式

$$G_c(x, t_1, \ldots, t_n) = \prod_{1 \leq r < s \leq n} (x - t_r - t_s - c t_r t_s)$$

を考えます．右辺の積には n 変数 $t_1, \ldots, t_n$ の内の相異なる２つの変数の組 $\{t_r, t_s\}$ が１回ずつ現れているので，$G_c(x, t_1, \ldots, t_n)$ は変数 $t_1, \ldots, t_n$ のどの２つを入れかえても変わりません．従って $G_c(x, t_1, t_2, \ldots, t_n)$ を x の多項式と思って展開したときの x^l $(l = 0, 1, \ldots, \frac{n(n-1)}{2})$ の係数を $A_l(t_1, \ldots, t_n)$ とすると，$A_l(t_1, \ldots, t_n)$ は $t_1, \ldots, t_n$ の実数係数の対称式となります．よって上の定理より，$A_l(t_1, \ldots, t_n)$ は $s_m(t_1, \ldots, t_n)$ $(1 \leq m \leq n)$ の実数係数の多項式で書くことができます．5.5 で考えた $g_c(x)$ の x^l の係数は $A_l(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ であり，一方 $s_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = -a_{n-1}$, $s_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = a_{n-2}$, …, $s_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (-1)^n a_0$ となるので，$g_c(x)$ の係数は $a_0, \ldots, a_{n-1}$ の実数係数の多項式でかけることが分かります．

6 構成的証明

§3, §4, §5 の証明では根の存在は分かるものの，根を実際に求めるという問題についてはあまり情報を与えてくれません．この章では，ある数列の極限として根を求めるという視点をもとにした証明について書こうと思います．

6.1 Weierstrass（ワイエルシュトラス）の方法 この視点から代数学の基本定理の証明を与えたのは Weierstarass が最初であるようです（1859 年）．複素数の n 次方程式 $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$ は，$a_1 \neq 0$ のとき，

$$z - (b + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \cdots + b_n z^n) = 0 \qquad (\star)$$

と書き直すことができます．$a_1 \neq 0$ のときは，適当な複素数 c をとって z を $z + c$ に置き換えてやれば $a_1 \neq 0$ にできます．

Weierstrass は ( ) の中の多項式を $g(z)$ とおき，

$$z_0 = 0, \qquad z_{m+1} = g(z_m) \ \ (m = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

で定まる数列 $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_m, \ldots$ を考えました．すると，$g(z)$ の定数項 b が十分小さい場合，この数列は収束することを証明できます．収束する場合，その極限 z_∞ が根となります．実際，等式 $z_{m+1} = g(z_m)$ の両辺の $m \to \infty$ での極限を考えると等式 $z_\infty = g(z_\infty)$ が得られます．Weierstarass はこの事実に着目して代数学の基本定理を証明しました．例えば

$$z - \left\{ \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} i \right) + \frac{1}{2} z^4 \right\} = 0$$

の場合に実際に計算してみると，次のように収束していきます．

z_0	0	z_7	0.245282054694427+0.201920804466228i
z_1	0.25+0.2i	z_8	0.245282054395212+0.2019208046845i
z_2	0.245253125+0.20225i	z_9	0.24528205439202+0.201920804660962i
z_3	0.245264361392681+0.201909102141248i	z_{10}	0.245282054393445+0.201920804661499i
z_4	0.245283254040118+0.20192016323898i	z_{11}	0.245282054393371+0.201920804661563i
z_5	0.24528205400832+0.201920891907413i	z_{12}	0.24528205439337+0.201920804661557i
z_6	0.24528204948236+0.201920801979711i	z_{13}	0.24528205439337+ 0.201920804661557i

6.2 高木貞治の証明 類体論の証明で有名な高木貞治は，この Weierstrass の手法を改良して代数学の基本定理を証明する 2 頁の論文（1902 年）を書いています．(高木貞治の全集 [3] の最初に載っている論文です．) その証明の流れをおおまかに紹介してみようと思います．

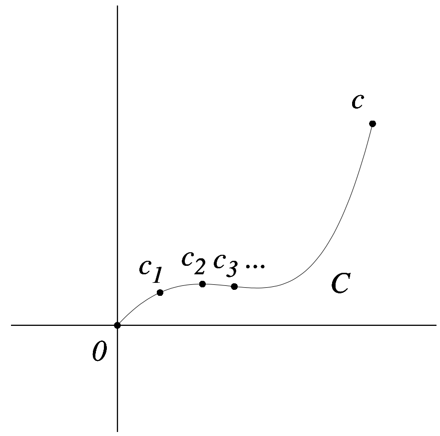
記号は 6.1 と同じとします．z を b のべき級数（定数項なし）

$$z = \gamma_1 b + \gamma_2 b^2 + \gamma_3 b^3 + \cdots$$

とおくと，b を変数とみなして，このべき級数が形式的に 6.1 の方程式 $(\star)$ みたすように，複素数 $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ を決定することができます．M を $|b_2|, \ldots, |b_n|$ の最大値とします．高木貞治は係数の巧妙な評価により，このべき級数は $|b| < \frac{1}{4(M+1)}$ のとき収束し，従って方程式 $(\star)$ の根を与えることを証明しています．(b を変数とみなして，6.1 のように数列を構成すると，ここで考えている級数に収束していくことが分かります．)

さて代数学の基本定理の証明ですが，係数 $b_2, b_3, \ldots, b_n$ は固定しておき，どんな複素数 b に対しても方程式 $(\star)$ に複素数の根が存在することを証明します．c を複素数とし，以下 $b = c$ のとき $(\star)$ が複素数の根を持つことを示すことを考えます．

　0 と c を結ぶ曲線 C を一つとります．まず $b=0$ のときは $z=0$ という根を持ちます．上の結果より，$|c_1|<\frac{1}{4(M+1)}$ をみたす C 上の点 c_1 をとれば，$b=c_1$ のときも $(\star)$ は複素数の根を持ちます．その根を α_1 とします．今もし α_1 が $1-g'(z)=0$ の根でなければ，方程式 $(\star)$ を $\widetilde{z}=z-\alpha_1$ で変数変換すると，



$$\widetilde{z}-\left(\frac{b-c_1}{1-g'(\alpha_1)}+\widetilde{b}_2\widetilde{z}^2+\cdots+\widetilde{b}_n\widetilde{z}^n\right)=0$$

という $(\star)$ と同じ形の方程式になります．よって M_1 を $|\widetilde{b}_2|,\ldots,|\widetilde{b}_n|$ の最大値とし，c_1 より c に近い C 上の点 c_2 で，$|c_2-c_1|<|1-g'(\alpha_1)|\frac{1}{4(M_1+1)}$ をみたすものをとれば，$b=c_2$ のときも $(\star)$ が複素数の根を持ちます．この操作を有限回繰り返して c に到達できれば証明が完結しますが，このままでは $c_1,c_2,c_3,\ldots$ の間隔が狭まっていって c に到達せずに収束してまう恐れを否定できません．また $(\star)$ の根が $1-g'(z)=0$ の根にもなっている b を避ける必要があります．

　実は

$$1-g'(z)=1-(2b_2z+3b_3z^2+\cdots+nb_nz^{n-1})$$

は b によらない多項式ですから，この複素数の根は高々$n-1$ 個しかありません．従って例外的な b は有限個しかないことがわかります．この有限個の点を避けるように 0 と c を結ぶ曲線 C をとり，上の議論で次の点をとる際にあらわれてくる数 $\frac{1}{4(M+1)},\ |1-g'(\alpha_1)|\frac{1}{4(M_1+1)},\ldots$ がある正の定数より大きくなることを示すことにより，$c_1,c_2,c_3,\ldots$ の間隔がどんどん狭まることがなく有限回で c に到達するようにとれることが証明できます．

参考文献

[1] H.-D. Ebbinghaus et al., 成木勇夫訳, 数（上）, Springer, 2004

[2] F. Benjamin, G. Rosenberger 著, 新妻 弘, 木村 哲三訳，代数学の基本定理, 共立出版, 2002

[3] The Collected Papers of TEIJI TAKAGI, 岩波書店, 1973