複素数の発見

公開講座「複素数の話」第1部
2010年11月6日
川又雄二郎(東大・数理)

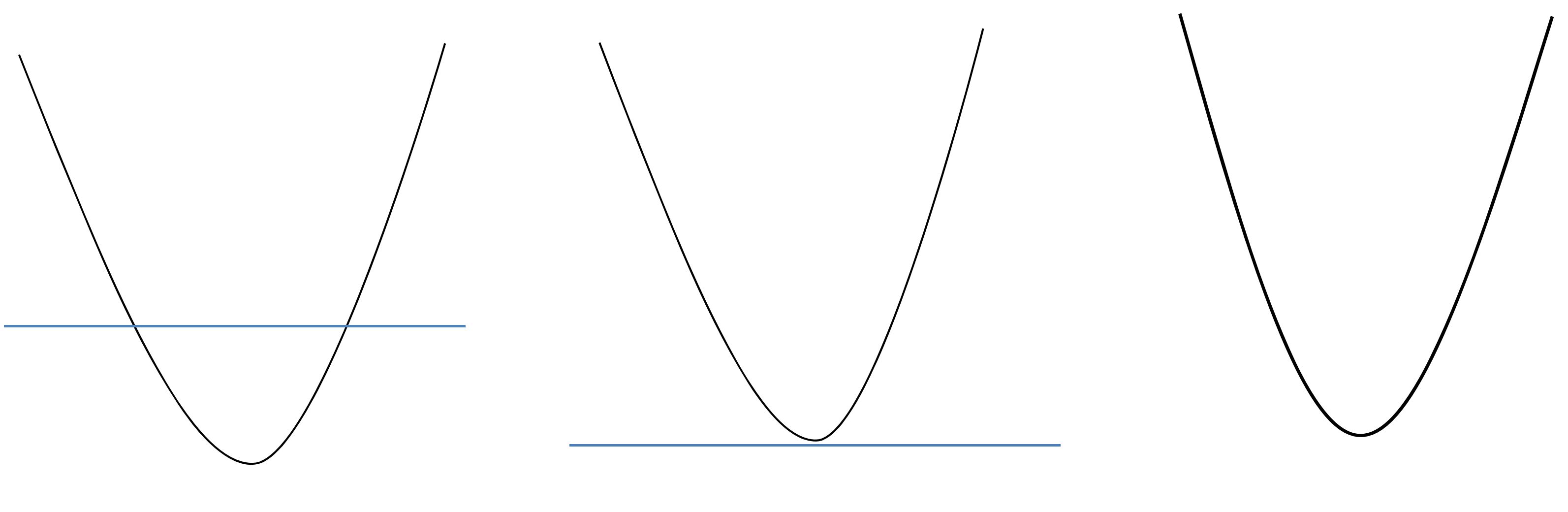
目次

- 高校数学の復習
  2次方程式の解法
  複素数 $z=x+iy=r(\cos\theta + i\sin\theta)$ と複素平面
- Cardano：3次方程式の解法、形式的解
- Bombelli, Descartes, Newton, Leibniz, Euler, Wallis, Wessel, Argand
- Gauss, Hamilton, Cauchy：概念の定着

参考：「数」(Zahlen)上, シュプリンガー

2次方程式

- 方程式　$x^2 + ax + b = 0$　(a, b は実数)
- グラフによる分類　$y = x^2 + ax + b$ と $y = 0$ の交わり: ２実根、重根、解なし（虚根）



代数的解法

- 平方完成 $(x + a/2)^2 = -b + a^2/4$
- 根の公式 $x = -a/2 \pm (a^2 - 4b)^{1/2}/2$

  平方根記号の内部 $D = a^2 - 4b$ (判別式)が負の場合には、

  形式的な公式であり、問題の解と対応するかどうかはわからない（複素数解＝虚根）
- 根と係数の関係

  因数分解 $x^2 + ax + b = (x - x_1)(x - x_2)$

  $a = -x_1 - x_2$, $b = x_1 x_2$
- 連立1次方程式へ帰着

  $x_1 + x_2 = -a$, $x_1 - x_2 = d$

  $d^2 = (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4 x_1 x_2 = a^2 - 4b = D$
- 根には順番はない。根を置換しても係数は変わらない。

  d は入れ替えたとき -1 倍される

複素数＝実数の組

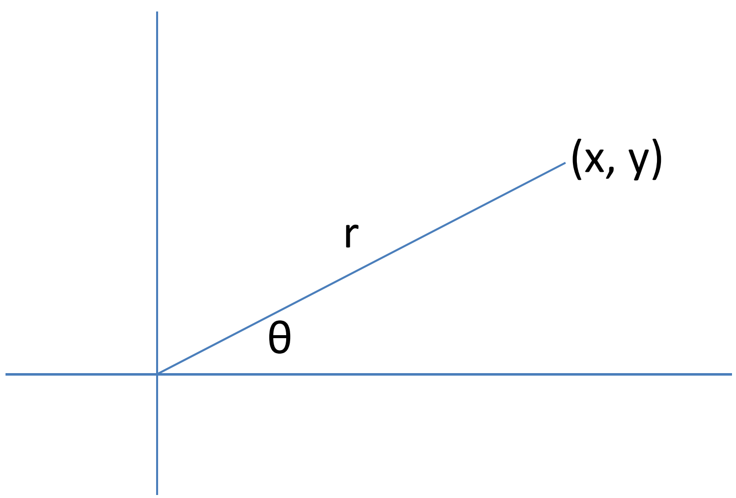
- 複素数 $z = x + y\,i$ は実数の組 (x, y)
  記号 i は 虚数単位 $i^2 = -1$
  疑問: $-i$ とは何か？
- 四則は形式的に定める:うまくいくことが存在理由

足し算 $(x_1 + y_1\,i) + (x_2 + y_2\,i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\,i$
引き算は同様
かけ算 $(x_1 + y_1\,i)\,(x_2 + y_2\,i) = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)\,i$
　　分配法則と $i^2 = -1$ から導ける
割り算もできることが重要 $1/(x + y\,i) = (x - y\,i)/(x^2 + y^2)$
交換法則、結合法則、分配法則が成り立つ
例: $x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$

複素平面

- $z = x + y\,i$ に, 平面上の点 (x, y) を対応させる
- ベクトルの長さ r 偏角 θ

$x = r \cos\theta$, $y = r \sin\theta$



平面ベクトルの四則

- 和は平行四辺形に対応
- 積は、長さの積と偏角の和に対応

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$z = z_1 z_2$, $r = r_1 r_2$, $\theta = \theta_1 + \theta_2$

$1/z = 1/r(\cos(-\theta_1) + i\sin(-\theta_1))$

- z を掛ける作用: r 倍して θ 回転（相似変換）

Girolamo Cardano (1501-76)

- 父は **Fabio Cardano (Leonardo da Vinci 1452-1519** 友人、法律家**)** 私生児、ラテン語では **Hieronymus Cardanus**
- 医者: 腸チフスをはじめて記述
- 占星術師: キリストのホロスコープを刊行し、異端者として投獄
- 発明家: ユニバーサル・ジョイント付きのカルダン・シャフト,
  ジンバル、コンビネーション・ロックなどを発明
- ギャンブラー: 金に困り、効率的なイカサマの方法として、確率論をはじめて系統的に研究 (**Blaise Pascal** は **1623-1662)**
  「**Liber de ludo aleae**」**(The book on games of chance)**
- 流体力学、暗号なども研究
- 二項係数を導入し二項定理を証明

「偉大なる芸術―代数学の法則」

- Hieronymus Cardanus：Artis Magnae sive de Regulis Algebraicis １５４５年
  (The Great Art or the Rules of Algebra)
- 3次4次方程式の解法を公表
- 2次方程式　Hammurabi 以来 BC 17-18c
  ローマ時代、中世を越えて、ルネサンスが花開く
- 3次方程式：Niccolo FontanaTartaglia の公式を証明、「盗作」疑惑、クレディットあり
- １３のタイプに分類して根の公式を導く
- 代数学は完結したので、これ以上は進むべきではない
- 4次方程式：Lodovico Ferrari、弟子

3次方程式の解法

- $x^3 + ax + b = 0$
- 因数分解　$x^3 + ax + b = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$
- 根と係数の関係　$x_1 + x_2 + x_3 = 0$,
  $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = a$,　$x_1x_2x_3 = -b$
- $\omega = -1/2 + (-3)^{1/2}/2$：$x^3 = 1$ の根
- 連立1次方程式へ帰着
  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 = A$, $x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3 = B$
  $A + B = 3x_1$, $AB = -3a$
  $x_1 = (A + B)/3$,　$x_2 = (\omega^2 A + \omega B)/3$,　$x_3 = (\omega A + \omega^2 B)/3$
  $d = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$ 根の置換での変化に注目
  $D = d^2 = -4a^3 - 27b^2$
  $(2A^3 + 27b)^2 = (2B^3 + 27b)^2 = -27D$

3次方程式の解法（その2）

- **Cardano の公式**
  $x = (-b/2 + (-3D)^{1/2}/18)^{1/3} + (-b/2 - (-3D)^{1/2}/18)^{1/3}$
- **根号の曖昧さ:**
  3次方程式の根の個数は3のはず
- **例**: $x^3 - 15x - 4 = 0$ **の根** $4, -2 \pm 3^{1/2}$

$D = 2^2 3^3 11^2$ **より**

$x = (2 + 11i)^{1/3} + (2 - 11i)^{1/3}$

$(2 \pm i)^3 = 2 \pm 11i$ **より**

$(2 \pm 11i)^{1/3} = 2 \pm i,\ (2 \pm i)\omega,\ (2 \pm i)\omega^2$

$x_1 = (2 + i) + (2 - i) = 4$

$x_2 = (2 + i)\,\omega^2 + (2 - i)\,\omega = -2 + 3^{1/2}$

$x_3 = (2 + i)\,\omega + (2 - i)\,\omega^2 = -2 - 3^{1/2}$

3次方程式の解法（その3）

- a, b は実数とする
  一つ実根があるので x_1 とする
- $x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 = A,\ x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3 = B$
  $y^2 - 3x_1 y - 3a = 0$ の２根が A, B
- ３実根 $\underline{x}_1 = x_1,\ \underline{x}_2 = x_2,\ \underline{x}_3 = x_3$: $\underline{A} = B$ 共役複素数
- １実根２虚根 $\underline{x}_1 = x_1,\ \underline{x}_2 = x_3$: $\underline{A} = A,\ \underline{B} = B$ 実数なので３乗根はただ一つ定まる。
- Casus irreducibilis：3実根の場合には、虚数を使わないと解が表せない。
  実数を表すのにも複素数を経由しなければいけない
  （複素数の存在意義）

複素数は実際に存在するのか？

- 解答例　Ａ：すんなり受け入れる、Ｂ：疑問を感じる。Ｂ１：疑問を考え続ける、Ｂ２：あきらめて投げ出す。
- すべてのことに根本的な疑問を抱くことは不可能なので、Ｂ２以外はOKである。
- 同じ問は、負の数、実数でも可能である。慣れの違いに過ぎない。
- 昔の人はすんなりとはいかず悩んだ（カルダノからガウスまで）。
- 実数は複素数より難しい。自然数は実数より難しい。

数とは何か

- 数える：自然数
- 位置、貸し借り：負の数
- 量、長さ、面積：実数（１D）
- 方程式の根（形式的な数）：複素数（２D）
- ４D，８D，１６D？
- 複素数＝相似変換ならば行列も数か？

形式と実体

- Rafael Bombelli (1526-72) :　形式的演算規則 8 個を定める。
- Rene Descartes (1596-1650) :　次数と根の数の一致に着目。ただし、虚根は実体がない。
- Isac Newton (1643-1727) : 虚根が出てくると問題は解けない。不可能性の証明になる。
- Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

  虚数は存在と不存在の両性を具有。哲学的でわからない。正しい計算

Euler (1707-83)

有名な公式　$e^{iz} = \cos z + i \sin z$　ここで z は複素数

$z = x + iy$　ならば　$e^{iz} = e^{ix}e^{-y} = e^{-y}(\cos x + i \sin x)$

例：$i \log i = -\pi/2$

計算多数。厳密な証明には興味なし。

- $(-d)^{1/2}$ は想像上の数にすぎない。正負零のいずれでもないから。
- 誤った計算もある(根号記号の曖昧さ):

  $(-1)^{1/2}(-4)^{1/2} = 4^{1/2} = 2$

  a, b > 0 では、$a^{1/2} > 0$, $-a^{1/2} < 0$, $(ab)^{1/2} = a^{1/2}b^{1/2}$

素人の活躍

- John Wallis (1616-1703) : 複素数と平面上の点の対応を発表、無視される
- Caspar Wessel (1745-1818) 測量技師
  平面ベクトルを計算するために複素数で表し、幾何学的な演算を定義
- Jean Robert Argand (1768-1822) 簿記係
  i を 90 度回転として把握
  i^2は 180 度回転なので –1
  $x^2 = -1$ の根は 2 個あり、どちらを i とするかは任意である

現代数学へ

- Carl Friedrich Gauss (1777-1855)
  神秘のベールから解放し、平易な概念として広く認知
  幾何学的表現に正当性を与えた
  R から見上げるのではなく、C を集合として定義した
- Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)
  抽象的集合 $C = R[X]/(X^2+1)$
- William Rowen Hamilton (1805-1865)
  幾何から代数へ
  実数の順序対 として複素数 a+bi を把握
  90度回転の意味がなくなる。4元数などへの発展。
  ガウス：前から知っていた。

まとめ

- 理論の枠組みができあがっていくときは、紆余曲折がある。それが忘れ去られて天下りになっていく。自分で新しい分野を切り開いていくときに参考になる。原著にさかのぼり創世記を知ることの重要性はここにある。
- 計算を実行すれば、とてもうまくいっているので、おもしろさがわかってくる。どんどん応用範囲が広がっていき、現在では「存在＝役に立つこと＝うまくいくこと」を疑うものはいない。複素関数、複素積分、量子理論、、、