余次元の高い葉層の特性類

広島大学理学部　　足助 太郎

１．序

本講演ではまず、余次元の高い場合の葉層構造の特性類の定義を Bott[4] に従って述べ、いくつか知られている事柄について触れた後、最後に横断的に複素解析的といわれる葉層の特性類について述べたい。

なお、講演の構成や特性類の導入は森田・西川・佐藤の各氏による「数学」の論説[17] を参考にした。

２．葉層構造の特性類

以下、多様体や写像などは特に断らない限りすべて C^∞ 級とする。

定義 2.1. 多様体 M の余次元 q の葉層構造 $\mathcal{F}$ とは、三つ組み $(\{U_\alpha\}_\alpha, \{f_\alpha\}_\alpha, \Gamma)$ で、次を満たす (極大な) ものをいう。

1) $\{U_\alpha\}_\alpha$ は M の開被覆
2) $f_\alpha : U_\alpha \to \boldsymbol{R}^q$ は各 U_α の上で定義された沈め込み (submersion)
3) Γ は $\boldsymbol{R}^q$ の局所微分同相からなる擬群で、各 α, β に対して、ある Γ の元 $\gamma_{\beta\alpha}$ が存在し、$U_\alpha \cap U_\beta$ 上で
$$\gamma_{\beta\alpha} \circ f_\alpha = f_\beta$$
が成り立つ。

$\mathcal{F}$ が M の葉層構造のとき、f_α の (局所的に定義された) ファイバーは条件 3) により滑らかに貼り合わさって、M にはめ込まれた多様体になるが、これのことを葉 (leaf) という。葉の次元は M の次元と葉層構造の余次元の差になる。M の接束 TM の元で、葉に接しているもの全体は TM の対合的な部分束になるが、これを $T\mathcal{F}$ と書き、さらに $Q(\mathcal{F}) = {}^{TM}/_{T\mathcal{F}}$ と定める。また、上の定義で、Γ が $\boldsymbol{R}^q$ の向きを保つ微分同相だけからなるとき、$\mathcal{F}$ は横断的に向き付け可能という。以下、葉層構造はすべて横断的に向き付け可能とする。

$(M, \mathcal{F})$, $(M', \mathcal{F}')$ をそれぞれ葉層構造とするとき、微分可能な写像 $f : M \to M'$ が M から M' への射であるとは、${f'}_\beta \circ f$ が M の葉層構造 $\mathcal{F}$ に属することをいう。

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

すると、葉層構造全体は圏 $C(\mathit{\Gamma})$ をなす。すると、抽象的には、葉層構造の特性類は次のように定義される。

定義 2.2. (横断的に向き付け可能な) 余次元 q の 葉層構造の $\boldsymbol{R}$ 係数の特性類とは、自然変換

$$\alpha : C(\mathit{\Gamma}) \to H^*(M; \boldsymbol{R})$$

のことである。

係数は $\boldsymbol{C}$ にすることもある。

しかしこれでは実際に特性類を計算しにくいので、一般には以下のように定義される 2 次特性類と呼ばれるものを考える。

定義 2.3. $[q]$ で、q を超えない最大の奇数を表す。このとき、Differential Graded Algebra WO_q を以下のように定める。

$$\mathrm{WO}_q = \Lambda[h_1, h_3, \cdots, h_{[q]}] \otimes \boldsymbol{R}_q[c_1, c_2, \cdots, c_q],$$

ここで、微分は

$$dh_i = c_i,\ dc_j = 0,$$

と定め、また各生成元の次数を

$$\deg c_i = 2i,\ \deg h_i = 2i - 1$$

と定める。また、$\boldsymbol{R}_q[c_1, c_2, \cdots, c_q]$ は $\boldsymbol{R}[c_1, c_2, \cdots, c_q]$ を次数が $2q + 1$ 以上の元からなるイデアル $\mathcal{I}$ で割ったものである。

すると、$H^*(\mathrm{WO}_q)$ は余次元 q の葉層構造の特性類を定める。つまり、次が成り立つ。

定理 2.4 (Bott[4])**.** 多様体 M と M の余次元 q の葉層構造が与えられると、準同型

$$\varphi : H^*(\mathrm{WO}_q) \to H^*(M; \boldsymbol{R})$$

が定まり、これは $C(\mathit{\Gamma})$ 上の自然変換を定める。

定理の写像 φ は次のように定める。まず、葉層構造 $\mathcal{F}$ が与えられると、Bott 接続と呼ばれる、葉層構造から定まる $Q(\mathcal{F})$ の接続 ∇_B が定義される。そして第 i Chern 多項式を c_i として $\varphi(c_i) = c_i(\nabla_B)$ と定める。ここで、$c_i(\nabla_B)$ は ∇_B からいわゆる Chern-Weil 構成により定まる M 上の微分形式である。

i が奇数のときは $c_i(\nabla_B)$ はコホモロジーの元としては自明であるが、このことを表す、つまり $dh_i(\mathcal{F}) = c_i(\nabla_B)$ となる微分形式 $h_i(\mathcal{F})$ を $Q(\mathcal{F})$ の Riemann 接続 (歪対称な接続) を使い、再び Chern-Weil 構成から定義することが出来る。そこで $\varphi(h_i) = h_i(\mathcal{F})$ と定める。

最後に、上記のイデアル $\mathcal{I}$ の元 c に対して $c(\nabla_B)=0$ である (Bott の消滅定理) 事が分かり、φ が WO_q から M 上の微分形式の空間への写像として定まる。これは明らかにコホモロジーの写像を誘導するので、再び φ と書く。

注意 2.5. つまり、WO_q は Bott の消滅定理と、i が奇数の時 c_i から定まる Pontrjagin 類 (にあたるもの) は自明である、という２つの事実を書き表したものである。

$H^*(\mathrm{WO}_q)$ のベクトル空間としての基底は Vey によって与えられている。具体的な形を述べる前に記号を定義する。

$I=\{i_1,\cdots,i_r\}\subset\{1,3,\cdots,[q]\}$, $J=(j_1,\cdots,j_q)\in\boldsymbol{Z}^q$, ただし $j_k>0$ として、

$$h_I=h_{i_1}\cdots h_{i_r},\ c_J=c_1^{j_1}\cdots c_q^{j_q}$$

と定め、

$$\begin{aligned}|I|&=(2i_1-1)+\cdots+(2i_r-1)=\deg h_I\\ |J|&=2\,(j_1+2j_2+\cdots+qj_q)=\deg c_J\end{aligned}$$

とおく。ただし、$h_\phi=1$ と定める。また、$I\neq\phi$ の時、i_0 で I に属する最小の数を表す。

定理 2.6 (Vey[8])**.** *$H^*(\mathrm{WO}_q)$ のベクトル空間としての基底は h_Ic_J, $|J|\le 2q$ で、I, J が次のいずれかを満たすもので与えられる。*

1) $I=\phi$, かつ k が奇数なら $j_k=0$
2) k を $j_k\neq 0$ なる最小の奇数とするとき、$i_0\le k$ で、さらに $(2i_0-1)+|J|>2q$
(後半の条件は h_Ic_J がコサイクルになっているという条件である。)

定義 2.7. $H^*(\mathrm{WO}_q)$ の基底のうち h_* を含むものを葉層の２次特性類という。φ による像も２次特性類と呼ぶ。

注意 2.8. 葉層の２次特性類としては Godbillon-Vey クラスが有名であるがこれは $H^*(\mathrm{WO}_q)$ の元 $h_1c_1^q$ に対応する。

３．いくつかの知られている事実

ここでは余次元の高い葉層の特性類へのいくつかのアプローチと今までに知られている事実をいくつか証明抜きに述べる。

I. ２次特性類の１次独立性・非自明性、連続な変形

定義 2.7 によれば、$q=1$ の時には２次特性類は Godbillon-Vey クラス h_1c_1 のみであるが、余次元 q が高くなると２次特性類の数が増えてくる。例えば $q=2$ の時は $h_1c_1^2$, h_1c_2 と２つになる (ちなみに $q=6$ ではその数は約７０にもなる)。しかし、これらが本当にすべて本質的に異なる特性類を与えているか、もっと単純に常

に自明になってしまったりしないのかといったことは実は難しい問題である。また、後でも触れるように、葉層の 2 次特性類のいくつかは Chern 類などの特性類と異なり、葉層を連続的に変形していった時に連続に変化することが知られている。

まず最初に問題を言い換えると次のようになる。葉層構造にはファイバーバンドルなどと同様に分類空間が存在する。これを $B\Gamma_q$ と書くことにすると、自然性から定理 2.4 の写像は準同型

$$\varphi_0 : H^*(\mathrm{WO}_q) \to H^*(B\Gamma_q)$$

を誘導するが、これの像がどう振る舞うか、また、核が存在するのかどうか調べようということである。

余次元が 1 の時には Thurston[22] により、Godbillon-Vey クラス h_1c_1 は葉層構造をいろいろ考えた時 $\boldsymbol{R}$ の全ての値を取る、言い換えれば全射 $H^3(B\Gamma_1) \to \boldsymbol{R}$ が存在することが知られているが、それに類する形で次が知られている。

定理 3.1 (Rasmussen[20])**.** $h_1c_1^2, h_1c_2$ は葉層構造をいろいろ考えた時、独立に動く。つまり、全射 $H^5(B\Gamma_2) \to \boldsymbol{R} \oplus \boldsymbol{R}$ が存在する。

特に $\varphi(h_1c_1^2), \varphi(h_1c_2)$ は一般には非自明であるし、$\varphi(h_1c_1^2) = c\varphi(h_1c_2)$ が常に成り立つような定数 c は存在しない。

もっと強く、次のようなことも知られている。

定理 3.2 (Heitsch[11])**.** V を、$H^{2q+1}(\mathrm{WO}_q)$ の h_ic_J の形をした元で生成される $\boldsymbol{R}$-部分空間とする。すると V の φ_0 による像は葉層構造を連続的に変形することにより、(ある一定の方法で記述できる) ベクトル空間を連続に動く。つまり、このベクトル空間の次元を d とすれば、全射 $H^{2q+1}(B\Gamma_q) \to \boldsymbol{R}^d$ が存在し、この全射は葉層の連続的な変形で記述できる。

2 次特性類の連続変形については、逆に次も知られている。

定理 3.3 (Heitsch[10])**.** $\mathcal{F}_s$ を 余次元 q の葉層構造の滑らかな 1-パラメーター族とする。このとき $(2i_0 - 1) + |J| > 2q + 1$ なるような全ての $h_Ic_J \in H^*(\mathrm{WO}_q)$ について、

$$h_Ic_J(\mathcal{F}_0) = h_Ic_J(\mathcal{F}_1)$$

がなりたつ。ここで $h_Ic_J(\mathcal{F}_s)$, $s = 0, 1$ はそれぞれ $\mathcal{F}_s$ に対応する $\varphi(h_Ic_J)$ である。

注意 3.4. 2 次特性類について $(2i_0 - 1) + |J| > 2q$ であったことを思い出されたい。

葉層構造が横断的な構造を持つ時には一般の場合より特性類について詳しく調べられている。葉層構造が横断的な構造を持つとは、葉層構造の定義 (2.1) において、Γ が特別な形に取れることを言う。例えば次のようになる。

定義 3.5. $\mathcal{F}$ を葉層構造とする。

1) $q = 2q'$ で、$\boldsymbol{R}^{2q'} = \boldsymbol{C}^{q'}$ とみた時に Γ が $\boldsymbol{C}^{q'}$ の複素解析的な局所微分同相となるとき、$\mathcal{F}$ を横断的に複素解析的な葉層という。
2) $\boldsymbol{R}^q$ に滑らかなリーマン計量が入っていて、Γ がこの計量を保つ時、$\mathcal{F}$ をリーマン葉層という。

特に、2) のリーマン葉層の場合は次の著しい結果がなりたつ。

定理 3.6. リーマン葉層 $\mathcal{F}$ について、

$$H^*(\mathrm{WO}_q) \to H^*(M; \boldsymbol{R})$$

は $* > 2q$ に対して零写像である。

これは特性類の定義の際に述べた Bott 接続と、Riemann 接続が同一に取れることによる。Pontrjagin 類が消えることから 2 次特性類が定義できたように、上の事実からリーマン葉層に対しては更にほかの (非自明で、連続的に変化するものもある) 特性類が定義できる[15,16]。一般に葉層が横断的な構造を持てば、その構造を利用して $H^*(\mathrm{WO}_q)$ から定義されるもの以外にも多くの特性類を定義できる。このことについては横断的に複素解析的な場合に後で触れる。

そもそもこのようなある構造を持つ葉層を考えるのは、Thurston [23] にも見られるように、余次元が 2 以上の葉層構造は非常に複雑で捉えにくいので、考える葉層構造を制限して、その代わりにその性質を詳しく調べようという動機による。

II. 葉層の位相的な性質との関係

葉層の特性類の研究の最終目標はやはり葉層構造自身の理解であるから、こちらのほうが問題としては本質的であると考えられる。しかし、余次元 1 の Godbillon-Vey 類の場合と違い、一般の余次元については Godbillon-Vey 類についてさえ、葉層構造自身との関係は明確にはなっていない。ほかの特性類については、それが葉層の何を表しているのかまったくわかっていないと言ってもよいと思われる。余次元が 1 の時には次のことが知られている。

定理 3.7 (Duminy[6])**.** 余次元 1 の葉層構造について、resilient leaf といわれる自分自身に巻き付くような葉が存在しなければ Godbillon-Vey 類は自明である。

これの高余次元版として次が知られている。

定理 3.8 (Hurder, Katok[13])**.** $\mathcal{F}$ を葉層構造とする。ほとんど全ての葉が subexponential growth を持てば $\mathcal{F}$ の Godbillon-Vey 類は自明である。

subexponential growth の定義はここではしないが、定理の条件は resilient leaf がない、というよりも強い条件であるので、Duminy の結果の弱い形での拡張になっている。

論文[13] のなかで、Hurder, Katok らは葉層の特性類をカレントの手法を用いて解析しているが、これには次のような事情が背景にあると思われる。つまり、定義か

らみると、葉層の２次特性類はとりあえず C^2-カテゴリーでないと定義されないが、Godboillon-Vey 類はしばしば葉層の (せいぜい) C^1 級の性質にしかよらないような挙動を示すことがある。このことから、

1) 実は Godbillon-Vey 類 (や、ほかの特性類) は葉層の位相的な (あるいはせいぜい C^1 級の) 性質にしか依らないのではないか、であるとか、
2) さらに Godbillon-Vey 類は位相的なカテゴリーや、C^1 カテゴリーで定義されてしまうのではないか、

ということが考えられる。 2) は実は葉層の余次元や、葉層の特性類の種類によらず常に正しくない[24] が、Godbillon-Vey 類の定義域や、新しい定義域での振る舞いは余次元や葉の次元が 1 の時にはかなり研究されている[25]。一方 1) については次が知られている。

定理 3.9 (Raby[19], Ghys-Tsuboi[7], Asuke[1], Moriyoshi[18])**.** 閉多様体の葉層構造の Godbillon-Vey 類は C^1-不変である。つまり、$(M_1, \mathcal{F}_1)$, $(M_2, \mathcal{F}_2)$ をそれぞれ閉多様体の滑らかな葉層構造とし、$\psi : M_1 \to M_2$ を C^1 級の微分同相で、$\mathcal{F}_1$ の葉を $\mathcal{F}_2$ の葉へ写すものとする。このとき $\mathrm{GV}(\mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2$ を $(M, \mathcal{F}_i)$ の Godbillon-Vey 類とする時、

$$\psi^*\mathrm{GV}(\mathcal{F}_2) = \mathrm{GV}(\mathcal{F}_1)$$

が成り立つ。

上でも述べたように Godbillon-Vey 類は C^1 カテゴリーでは定義されないことを考えると上の定理はやや奇異にみえるが、一方でこれは Godbillon-Vey 類がしばしばみせる挙動の一つの現われとも思える。しかし、いずれにせよ上の定理が何を意味するのかは今一つよくわからない。

４．横断的に複素解析的な場合

ここでは横断的に複素解析的といわれる葉層の特性類について述べる。この節では特に断らない限り葉層はすべて横断的に複素解析的とする。また、葉層の余次元は $\boldsymbol{C}$ 上の次元をとることにする。

このような葉層を考える理由はいくつかあるが、主なものとして

1) 葉層の２次特性類の理論の中では、当初から考えられていた対象であること、
2) 1) にもかかわらず、比較的議論されたことが少ないこと、
3) 最近横断的に複素解析的な葉層についていくつか進展があり[5]、注目されている対象であること、

があげられる。

先に進む前に、横断的に複素解析的な葉層の特性類を定義する。

定義 4.1. Differential Graded Algebra WU_q と $\mathrm{W}_q^{\boldsymbol{C}}$ を以下で定める。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{WU}_q &= \Lambda[\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2, \cdots, \widetilde{u}_q] \otimes \boldsymbol{C}_q[v_1, v_2, \cdots, v_q] \otimes \boldsymbol{C}_q[\overline{v_1}, \overline{v_2}, \cdots, \overline{v_q}] \\
\mathrm{W}_q^{\boldsymbol{C}} &= \Lambda[u_1, u_2, \cdots, u_q] \otimes \Lambda[\overline{u_1}, \cdots, \overline{u_q}] \otimes \boldsymbol{C}_q[v_1, v_2, \cdots, v_q] \otimes \boldsymbol{C}_q[\overline{v_1}, \overline{v_2}, \cdots, \overline{v_q}]
\end{aligned}
$$

ここで微分は

$$d\widetilde{u}_i = v_i - \overline{v_i},\ du_i = v_i,\ d\overline{u_i} = \overline{v_i},\ dv_i = d\overline{v_i} = 0$$

と定め、各生成元の次数は

$$\deg \widetilde{u}_i = \deg u_i = \deg \overline{u_i} = 2i-1,\ \deg v_j = \deg \overline{v_j} = 2j$$

で定める。また、$\boldsymbol{C}_q[v_1, v_2, \cdots, v_q]$ などは $\boldsymbol{R}_q[c_1, \cdots, c_q]$ と同様に、$\boldsymbol{C}[v_1, v_2, \cdots, v_q]$ を次数が $2q$ より大きい元からなるイデアル $\mathcal{I}$ で割ったものとして定める。

ここで自然な写像 $H^*(\mathrm{WU}_q) \to H^*(\mathrm{W}_q^{\boldsymbol{C}})$ が存在することに注意しておく。また、$\boldsymbol{C}_q[v_1, \cdots, v_q]$ などの代わりに $\boldsymbol{R}_q[v_1, \cdots, v_q]$ などを考えても良い。

すると定理 2.4 と同様に、次が成り立つ。

定理 4.2 (Bott[3,4])**.** 多様体 M と M の複素余次元 q の横断的に複素解析的な葉層構造が与えられると、準同型

$$\varphi_{\boldsymbol{C}} : H^*(\mathrm{WU}_q) \to H^*(M; \boldsymbol{C})$$

が定まり、これは葉層の特性類を定める。また、$Q(\mathcal{F}) = {}^{TM}/_{T\mathcal{F}}$ は今の場合複素ベクトル束になるが、これが自明な時には

$$\widehat{\varphi}_{\boldsymbol{C}} : H^*(\mathrm{W}_q^{\boldsymbol{C}}) \to H^*(M; \boldsymbol{C})$$

が定義され、$Q(\mathcal{F})$ が自明な葉層構造の特性類を定める。

ここではこのようにして定まる特性類を複素な特性類と便宜的に呼ぶ。

$\varphi_{\boldsymbol{C}}$ の構成は、Chern 類 v_i は複素共役について不変 (つまり Chern 類は real な対象) であるということと、横断的に複素解析的な葉層に対する Bott の消滅定理、すなわち $\mathcal{I}$ の元 c に対して $c(\nabla_B)$ は微分形式として 0、ということを使い、あとは定理 2.4 とまったく同様に行う。つまり、v_i には第 i Chern 類 $v_i(\mathcal{F})$ を対応させ、$\widetilde{u}_i$ には第 i Chern 類が real であるということをあらわす微分形式 $\widetilde{u}_i(\mathcal{F})$ を対応させることにする。このとき Chern 類を表す微分形式は (複素の)Bott 接続を用い、$u_i(\mathcal{F})$ の構成にはその Bott 接続と、その複素共役を用いる。

$Q(\mathcal{F})$ が自明な場合には、Chern 類はすべて自明になるから、定理 2.4 での Riemann 接続の代わりに Hermite 接続を用いて $du_i(\mathcal{F}) = v_i(\mathcal{F})$ となる微分形式を構成し、$\widehat{\varphi}_{\boldsymbol{C}}(u_i) = u_i(\mathcal{F})$, $\widehat{\varphi}_{\boldsymbol{C}}(\overline{u_i}) = \overline{u_i(\mathcal{F})}$ と定める。

定義 4.3. $H^*(\mathrm{W}_q^{\boldsymbol{C}})$ の元 $u_1v_1^q$ もしくはそれの $\widehat{\varphi}_{\boldsymbol{C}}$ による像を Bott 類と呼ぶ。

注意 4.4. 歴史的には Godbillon-Vey 類よりも Bott 類のほうが先に知られていた。また、定義からわかるように Bott 類は一般の (第 1 Chern 類が非自明な) 横断的に複素解析的な葉層に対しては定義できない。

$H^*(\mathrm{WU}_q)$ のベクトル空間としての基底は筆者の知る限り具体的には知られていない。しかし、定義 2.7 を真似て次のように定義する。

定義 4.5. $H^*(\mathrm{WU}_q)$ や $H^*(\mathrm{W}_q^{\boldsymbol{C}})$ の元で、$\widetilde{u}_i$ や $u_i, \overline{u_i}$ を含むものを (複素な) 2 次特性類という。

横断的に複素解析的な葉層の複素な特性類をまとめて扱った論文としては [12] や [21] などがあり、主に特性類の連続的な変形について扱っている。すでに[4] に見られるように複素な特性類の変形は比較的容易であり、早い段階から Bott 類をはじめとする $H^{2q+1}(\mathrm{W}_q^{\boldsymbol{C}})$ の元や、一部の $H^{4q+1}(\mathrm{WU}_q)$ の元は非自明で、なおかつ連続的に変形することが知られていた。

定理 3.6 の後で述べたように、葉層の特性類のもっとも基本的なものは $H^*(\mathrm{WO}_q)$ から定まるものであり、葉層に構造がいろいろ入って行くにつれてその他の特性類が定義されていくと考えることにすると、横断的に複素解析的な葉層構造の特性類としてもっとも基本的な部分は $H^*(\mathrm{WO}_{2q})$ から定まるものであると考えることが出来る。これはすなわち、葉層の横断的な複素構造を忘れるということで、分類空間の言葉で言えば写像

$$B\Gamma_q^{\boldsymbol{C}} \to B\Gamma_{2q}$$

を考えるということである。ここで、$B\Gamma_q^{\boldsymbol{C}}$ は複素余次元 q の葉層構造の分類空間である。するとコホモロジーでは

$$H^*(B\Gamma_{2q}) \to H^*(B\Gamma_q^{\boldsymbol{C}})$$

という写像が存在するが、これは大変難しいことが予想されるので、ここでは 2 次特性類に話を絞る。つまり、写像

$$\lambda : H^*(\mathrm{WO}_{2q}) \to H^*(\mathrm{WU}_q)$$

とその像を考えることにするが、この写像の存在は (一応) 自明ではない。しかしやはりこの写像は存在する ([2]、特別な場合には[21])。

定理 4.6. 横断的な複素構造を忘れることに対応する写像

$$\lambda : H^*(\mathrm{WO}_{2q}) \to H^*(\mathrm{WU}_q)$$

が存在し、コチェインレベルで記述できる。具体的には

$$\lambda(c_k) = (\sqrt{-1})^k \sum_{j=0}^{k} (-1)^j v_{k-j}\overline{v_j},$$

$$\lambda(h_{2k+1}) = \frac{(-1)^k}{2}\sqrt{-1}\sum_{j=0}^{2k+1}(-1)^j \widetilde{u}_{2k-j+1}(v_j + \overline{v_j})$$

と定義すると、これは $H^*(\mathrm{WO}_{2q}) \to H^*(\mathrm{WU}_q)$ を誘導し、次を満たす。

任意に横断的に複素解析的な葉層構造 $(M, \mathcal{F})$ が与えられた時、定理 2.4、定理 4.2 により 2 次特性類を与える写像 $\varphi, \varphi^{\boldsymbol{C}}$ が存在するが、この時図式

$$\begin{array}{ccc} H^*(\mathrm{WO}_{2q}) & \xrightarrow{\lambda} & H^*(\mathrm{WU}_q) \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_{\boldsymbol{C}}} \\ H^*(M;\boldsymbol{R}) & \longrightarrow & H^*(M;\boldsymbol{C}) \end{array}$$

が可換になる。

リーマン葉層の場合に著しかったように、葉層が横断的な構造を持つ場合には $H^*(\mathrm{WO}_q)$ (今の場合 $H^*(\mathrm{WO}_{2q})$) から定まる 2 次特性類は一般の場合よりは簡単になることが予想される。葉層の 2 次特性類では Godbillon-Vey 類が基本的であったから、まずその像を見てみると、

$$\lambda(h_1 c_1^{2q}) = C\widetilde{u}_1 v_1^q \overline{v_1}^q$$

となる (C は定数)。この時次が知られている ([21],[2])。

定理 4.7. Godbillon-Vey 類 $\widetilde{u}_1 v_1^q \overline{v_1}^q$ が非自明な葉層構造が任意の複素余次元 q に対して存在する。

これは複素余次元が 1 の場合には、例えば閉双曲多様体上の単位球面束上の Anosov 流と呼ばれるもので実現される。

しかし一方で λ の像を見てやると次がわかる[2]。

定理 4.8. 複素余次元が 1 の葉層に対して、

$$\lambda(h_1 c_1^2) = 2\lambda(h_1 c_2)$$

が常に成り立つ。

これは定理 3.1 とは対照的である。また、一般に複素余次元が高い場合にはある線型関係が定理 2.6 に示した $H^*(\mathrm{WO}_{2q})$ の基底に生じる。現時点では $q = 2, 3$ の時にはこの関係は決定されている。また、次のようなことも成り立つ[2]。

定理 4.9. V を $h_1, \cdots, h_{[q]}$ や $c_1, \cdots, c_q$ だけで書けるような WO_{2q} の元から生成される $H^*(\mathrm{WO}_{2q})$ の部分空間とする。このとき任意の横断的に複素解析的な葉層構造 $(M, \mathcal{F})$ に対して、φ による $H^*(\mathrm{WO}_{2q})$ の $H^*(M)$ への像は V の φ による像と一致する。つまり、２次特性類は「半分」になる。

すると、3．でも触れたように、横断的に複素解析的な葉層に対していくつか新しい特性類を定義することが出来る。例えば、$k > q$ の時に第 k Pontrjagin 指標 $\widetilde{p}_k$ の φ による像が微分形式として消えることが上の定理からわかる。そこで $\varphi(h_i)$ を定義したのと同じ方法で Bott 接続と Riemann 接続から $d\eta_k(\mathcal{F}) = \varphi(\widetilde{p}_k)$ となる微分形式を構成すると、今の場合 $\eta_k(\mathcal{F})$ は $H^*(M)$ の元を定める。さらに、実は η_k は $H^*(\mathrm{WU}_q)$ のある元の $\varphi_{\boldsymbol{C}}$ による像として書けることがわかる。このことは、WU_q がある意味で WO_{2q} の拡張になっているともいえる。

最後に Bott 類と Godbillon-Vey 類の関係について述べる。注意 4.4 でも述べたように、Bott 類は常に定義できる訳ではない。しかし Bott 類の虚部に当たるものは常に定義でき、横断的に複素解析的な葉層構造において基本的であろうと思われる。

定義 4.10. $H^*(\mathrm{WU}_q)$ の元 ξ を

$$\xi = \sqrt{-1}\widetilde{u}_1(v_1^q + v_1^{q-1} + \cdots + \overline{v_1}^q)$$

で定める。

すると簡単な計算により次がわかる[2]。

定理 4.11. Godbillon-Vey 類は ξ と第 1 Chern 類に分解する。つまり、ある定数 C' が存在して

$$\lambda(h_1 c_1^{2q}) = C' \xi v_1^q$$

が成り立つ。また、第 1 Chern 類が自明であれば Bott 類が定義できるが、この時は ξ は Bott 類の虚部になる。さらに、このクラス ξ は連続に変形する。

系 4.12. 第 1 Chern 類が自明であるような複素多様体上の横断的に複素解析的な葉層構造の Godbillon-Vey 類は自明である。ここで、横断的な複素構造は多様体の複素構造から入るものとする。

References

1. T. Asuke, *Invariance of the Godbillon-Vey Class by C^1-Diffeomorphisms for higher codimensional foliations*, preprint.
2. ——, *On the real secondary classes of transversely holomorphic foliations*, preprint.
3. R. Bott, *On the Lefschetz Formula and Exotic Characteristic Classes*, Symposia Math. **10** (1972), 95–105.
4. R. Bott, S. Gilter, I. M. James, *Lectures on Algebraic and Differential Topology*, Lecture Notes in Mathematics, No. 279, Springer-Verlag, 1972.
5. M. Brunella and E. Ghys, *On transversely Holomorhic flows* I,II, Invent. Math. **126** (1996), 265–279, 281–286.

6. G. Duminy, *L'invariant de Godbillon-Vey d'un feuilletage se localise dans les feuilles ressort* (1982), preprint.
7. E. Ghys and T. Tsuboi, *Différentiabilité des conjugaisons entre systèmes dynamiques de dimension* 1, Ann. Inst. Fourier **38** (1988), 215–244.
8. C. Godbillon, *Cohomologies d'algèbres de Lie de champs de vecteurs formels*, Séminaire BOURBAKI, 25e année, 1972/73, n° 421, pp. 421-01–421-19.
9. A. Haefliger, *Groupoïdes d'holonomie et classifiants*, Structure Transverse des Feuilletages, Toulouse 1982, Astérisque, vol. 116, 1984, pp. 70–97.
10. J. Heitsch, *Deformations of secondary characteristic classes*, Topology **12** (1973), 381–388.
11. ———, *Independent variation of secondary classes*, Annals of Math. **108** (1978), 421–460.
12. ———, *A residue formula for holomorphic foliations*, Michigan Math. J. **27** (1980), 181–194.
13. S. Hurder and A. Katok, *Ergodic theory and Weil measures for foliations*, Annals of Math. **126** (1987), 221–275.
14. F. W. Kamber and P. Tondeur, *Foliated Bundles and Characteristic Classes*, Lecture Notes in Mathematics, No. 493, Springer-Verlag, 1975.
15. C. Lazarov and J. Pasternack, *Secondary characteristic classes for Riemanninan foliations*, J. Diff. Geom. **11** (1976), 365–385.
16. S. Morita, *On characteristic classes of Riemannian foliations*, Osaka J. Math. **16** (1976), 161–172.
17. S. Morita, S. Nishikawa, H. Sato, Γ-葉層構造の特性類について, 数学 **31** (1979), 110–128.
18. H. Moriyoshi, talk given at seminar on foliations at Atami, October 1996.
19. G. Raby, *Invariance des classes de Godbillon-Vey par C^1-difféomorphismes*, Ann. Inst. Fourier **38** (1988), 205–208.
20. O. Rassmussen, *Continuous variation of foliations in codimension two*, Topology **19** (1980), 335–349.
21. ———, *Exotic Characteristic Classes for Holomorphic Foliations*, Invent. Math. **46** (1978), 153–171.
22. W. Thurston, *Noncobordant foliations of S^3*, Bull. Amer. Math. Soc. **78** (1972), 511–514.
23. ———, *The theory of foliations of codimension greater than one*, Comment. Math. Helv. **49** (1974), 214–231.
24. T. Tsuboi, *On the foliated products of class C^1*, Annals of Math. **130** (1989), 227–271.
25. ———, *Godbillon-Vey* 類の特徴付け, 数学 **45** (1993), 128–140.

1-3-1 Kagamiyama, Higashi-Hiroshima-shi, Hiroshima 739, Japan
E-mail address: asuke@math.sci.hiroshima-u.ac.jp