曲線をよくみる

２００８年度公開講座「図形をみる」

足助 太郎

２００８年１１月２２日

曲線とは？

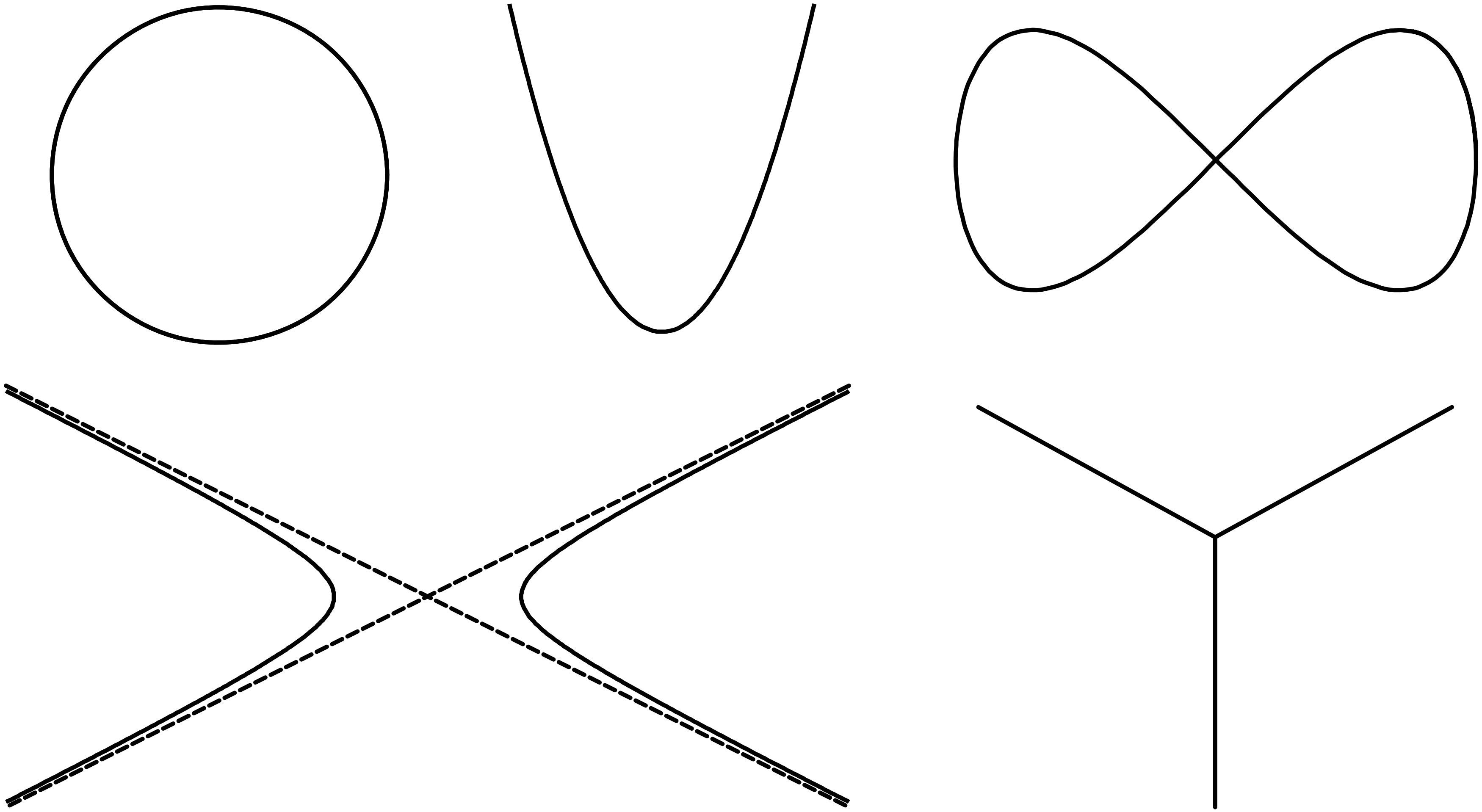

図 1: 円・放物線・双曲線と８の字・Ｙの字

曲線とは？

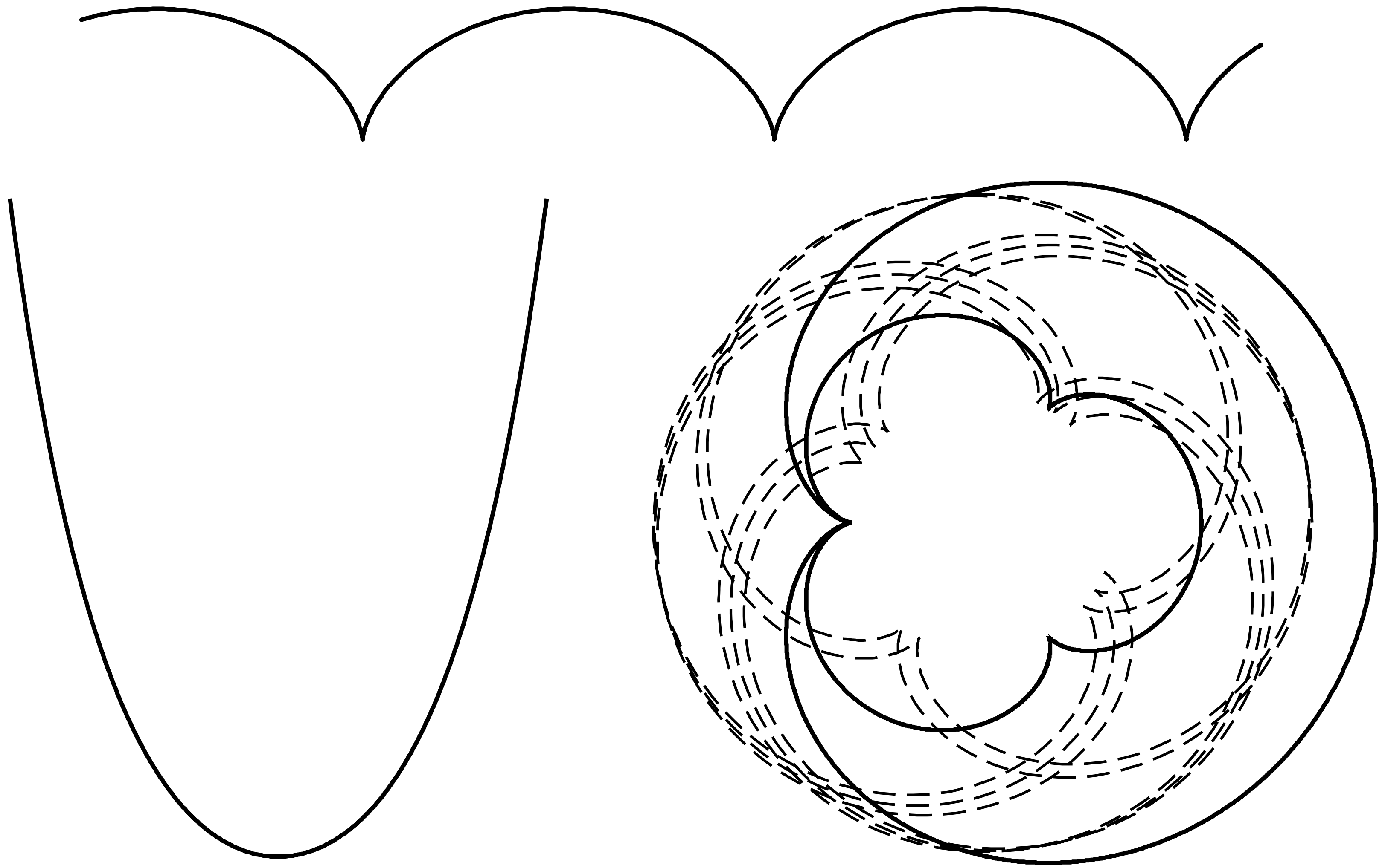

図 2: 懸垂線・サイクロイド・カージオイド

曲線とは？

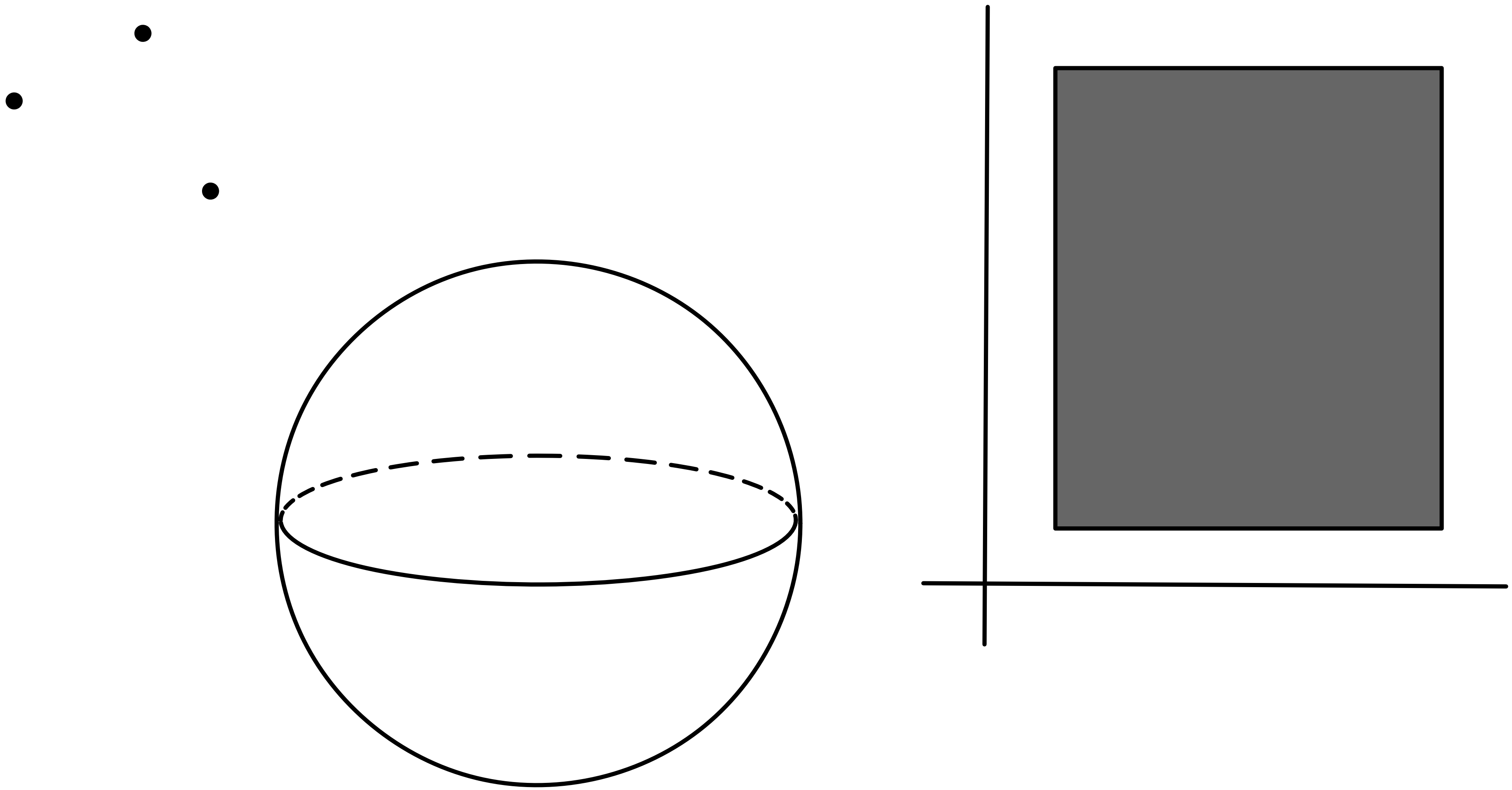

図 3: 曲線には見えない図形

曲線とは

つながっている図形であって,

直線を曲げるか折るかすれば

過不足なく貼り付けることができるもの

曲線とは

記号 1.1. • $I = [0,1] = \{0\text{ 以上 }1\text{ 以下の実数}\}$.

- 平面（xy-平面）上の点を (x,y) のように実数を二つ並べて表す.

定義 1.2. C を平面内の図形とする． C が**曲線**であるとは, $t \in I$ に対して平面上の点 $f(t)$ を与えるような写像（函数・関数）f であって連続かつ単射であるようなものが存在し,

$$C = f(I) = \{f(t) \mid 0 \leq t \leq 1\}$$

と表すことができることを言う.

連続な写像

実数 s が実数 t に近づいていくと $f(s)$ も $f(t)$ に近づく

式で書けば

$$\forall s > 0,\ \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0, |s - t| < \delta \implies |f(s) - f(t)| < \epsilon$$

単射な写像

$f(t) = f(t')$ ならば $t = t'$ である

今日は **ジョルダン（Jordan）曲線** を単に **曲線** と呼ぶ.

直線，放物線，円弧 $\cdots$

- $y = ax + b$ $\qquad f(t) = (t, at + b)$
- $y = ax^2$ $\qquad f(t) = (t, at^2)$
- $y = \sqrt{1 - x^2}$ $\qquad f(t) = (t, \sqrt{1 - t^2}\,)$

円周などは「ジョルダン閉曲線」

一般の曲線

８の字・Ｙの字 $\cdots$

曲線を比べる

- C_1 と C_2 の長さ

- C_1 と C_2 が囲む図形の形や面積など

- C_1 と C_2 の曲がり方や，折れ曲がり方

曲線の長さ

　基本的なのは直線の長さ

定理 2.1. $p = (a, b)$, $q = (c, d)$ とする．p, q を結ぶ線分の長さ $|p - q|$ は

$$|p - q| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$$

で与えられる．

三平方の定理
ピタゴラス（Pythagoras, ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ）の定理

曲線の長さ

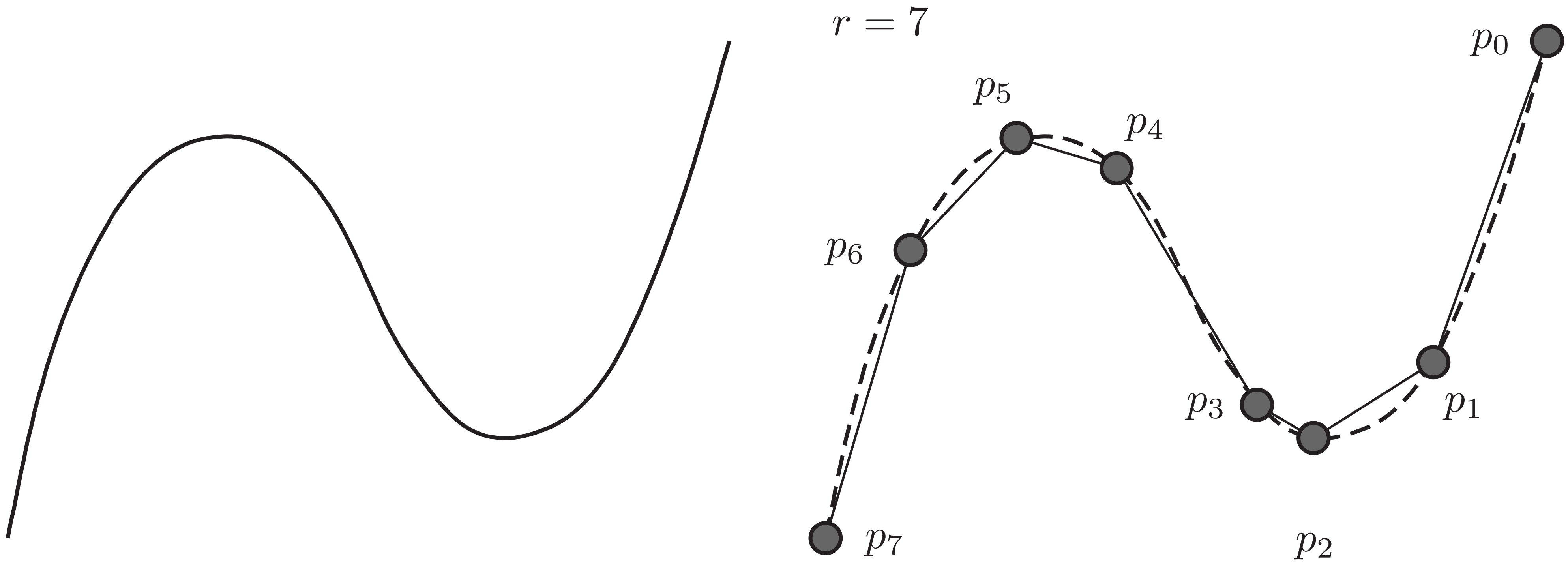

図 4: 曲線を折れ線に直す

$$|p_r - p_{r-1}| + |p_{r-1} - p_{r-2}| + \cdots + |p_1 - p_0| = \sum_{i=1}^{r} |p_i - p_{i-1}|$$

曲線の長さ

折れ線の長さ

$$|p_r - p_{r-1}| + |p_{r-1} - p_{r-2}| + \cdots + |p_1 - p_0| = \sum_{i=1}^{r} |p_i - p_{i-1}|$$

$p_0, p_1, \cdots, p_r$ 達は C 上の点である.

従って $p_i = f(t_i)$ と表すことができる.

$$\sum_{i=1}^{r} |p_i - p_{i-1}| = \sum_{i=1}^{r} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

曲線の長さ

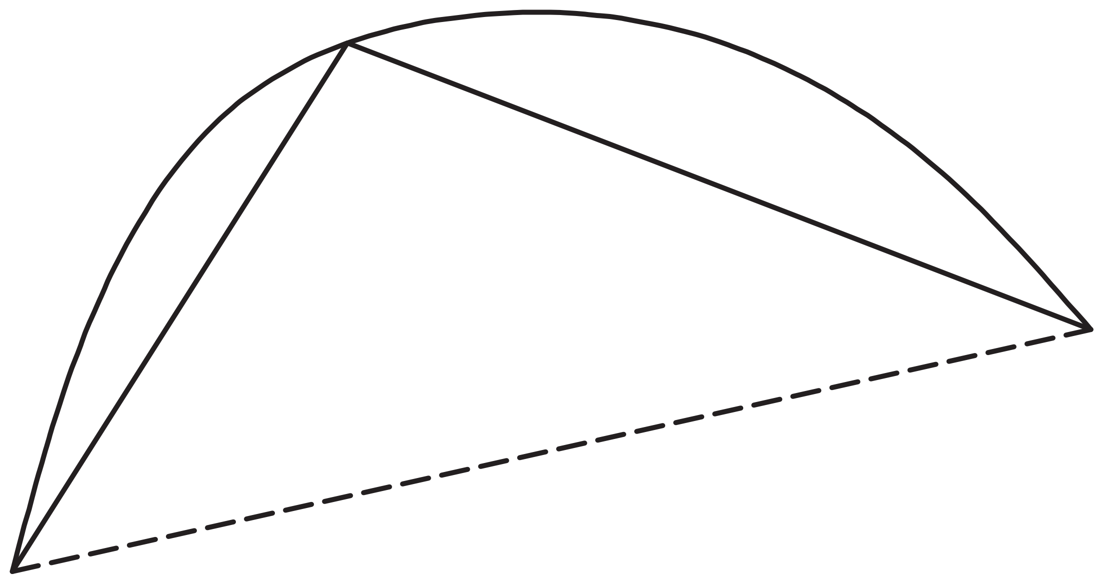

図 5: 点を増やすと折れ線の長さは長くなる傾向にある

曲線の長さ

定義 2.2. $C = f(I)$ を曲線とする.

$$\ell(C) = \sup_{\substack{r>0 \\ 0=t_0<t_1<\cdots<t_r=1}} \sum_{i=1}^{r} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

と置き，C の長さと呼ぶ.

sup は大雑把に言えば最大値（上限と呼ばれる）

$t \leq 1$ をみたすような実数 t の最大値は 1

$t < 1$ をみたすような実数 t の最大値は存在しないが,

上限は 1

曲線の長さ

- C が線分であれば $\ell(C)$ は三平方の定理から求まる長さと一致する.

- 円周（円弧）などの長さがよく知られているような馴染み深い曲線についてもそれらの長さと一致する.

さまざまな曲線

例 3.1.

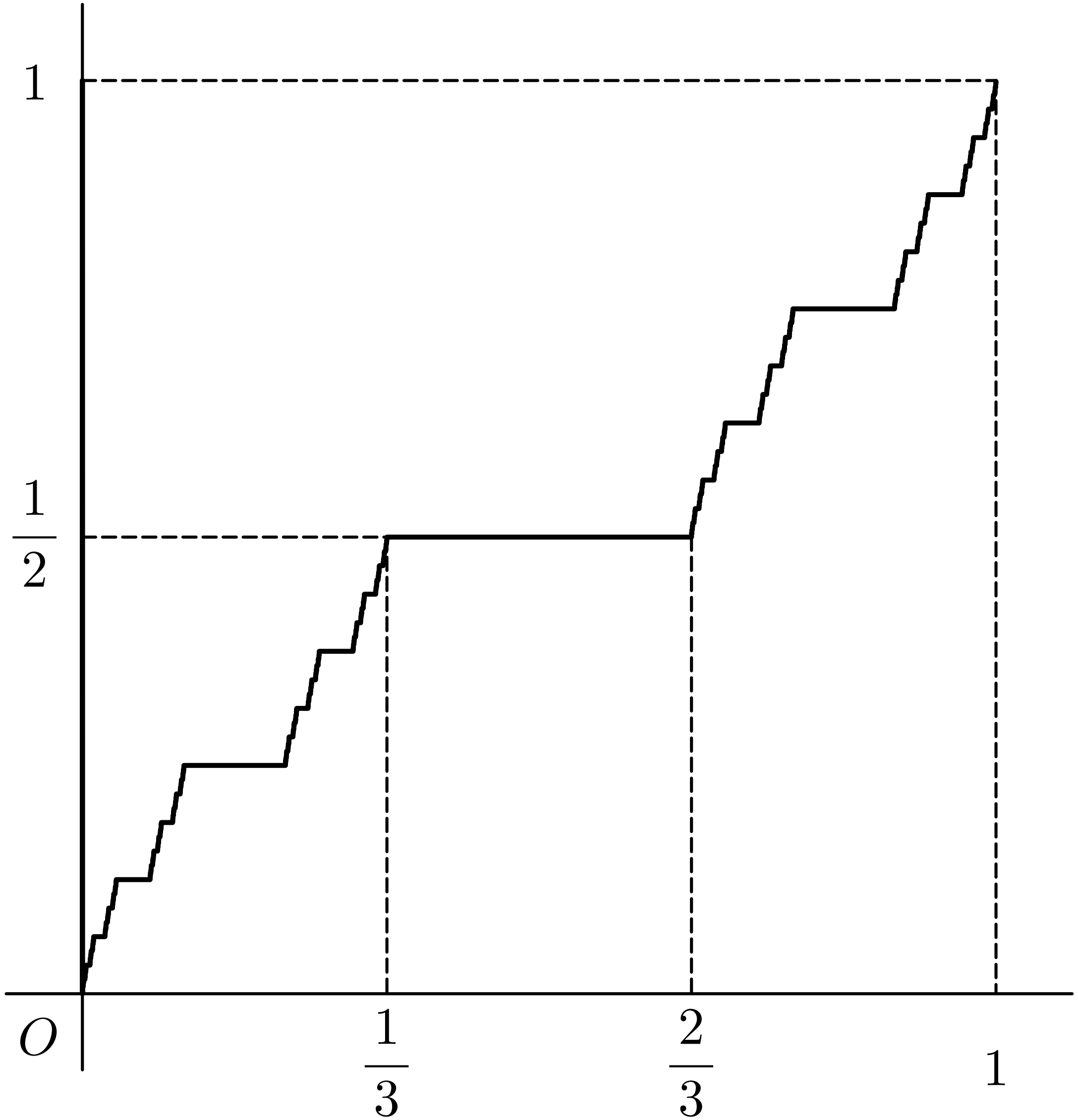

図 6: 悪魔の階段（Devil’s ladder）

さまざまな曲線（悪魔の階段）

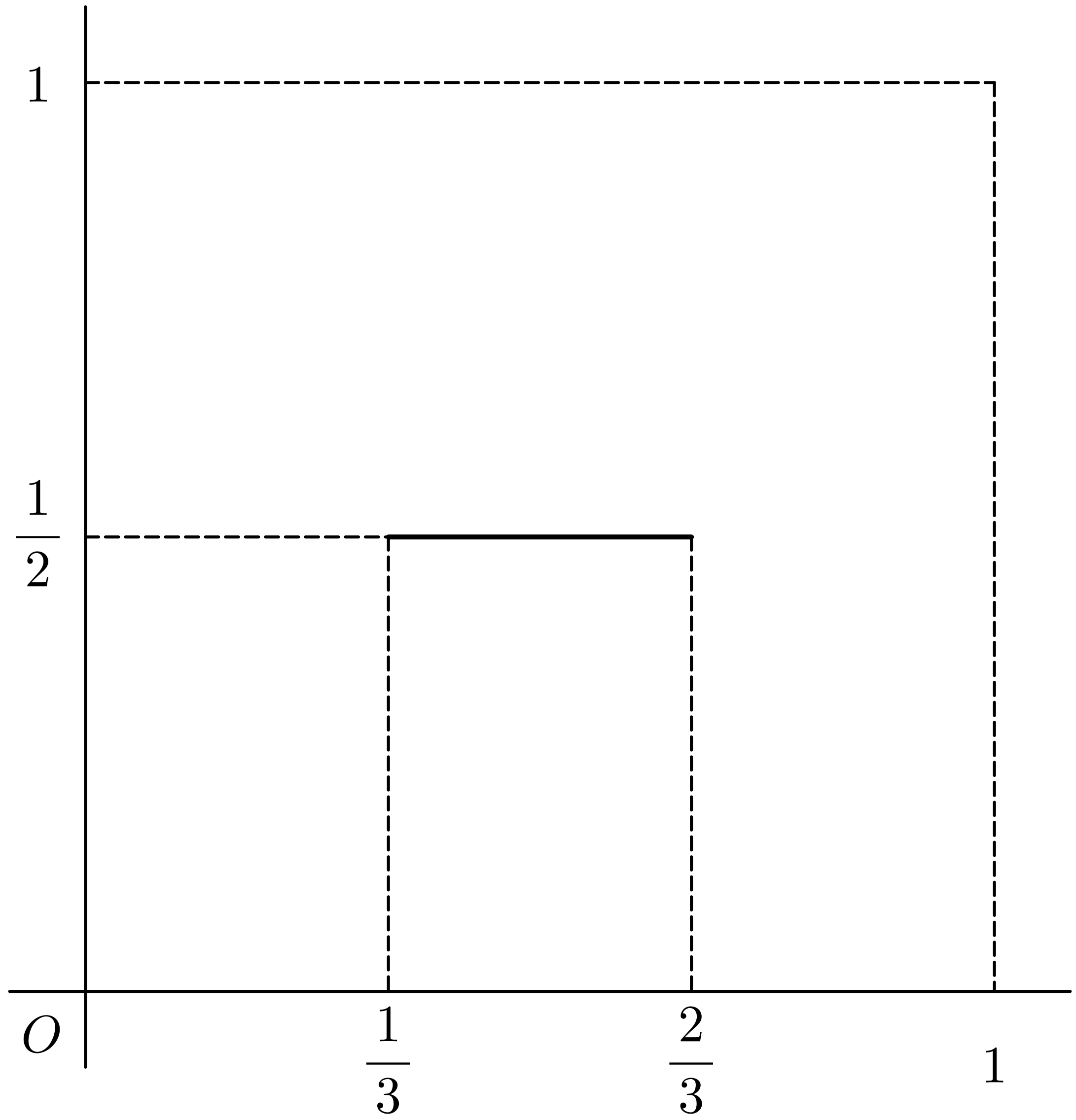

図 7: 最初の段階

さまざまな曲線（悪魔の階段）

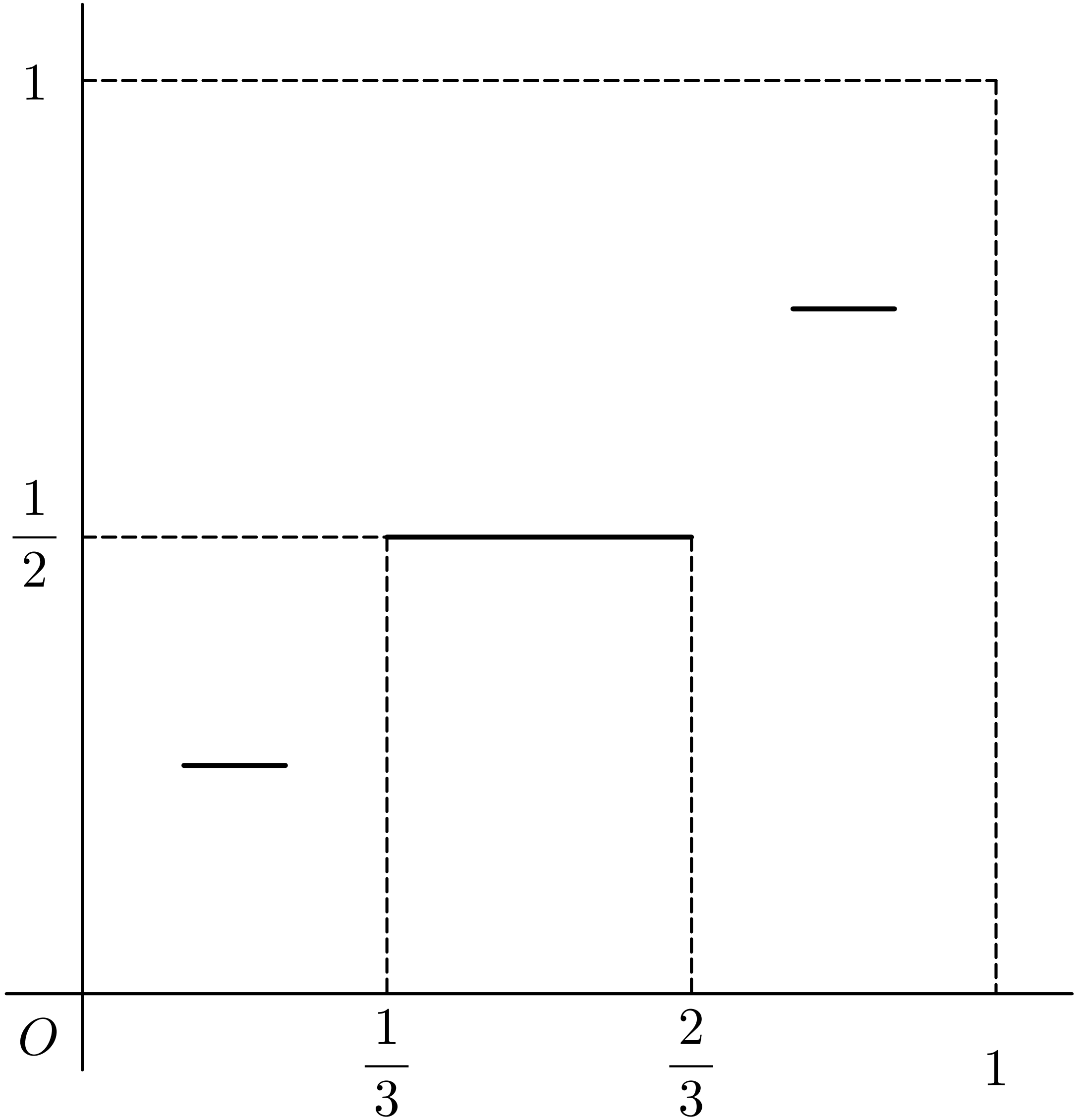

図 8: 第二段階

さまざまな曲線（悪魔の階段）

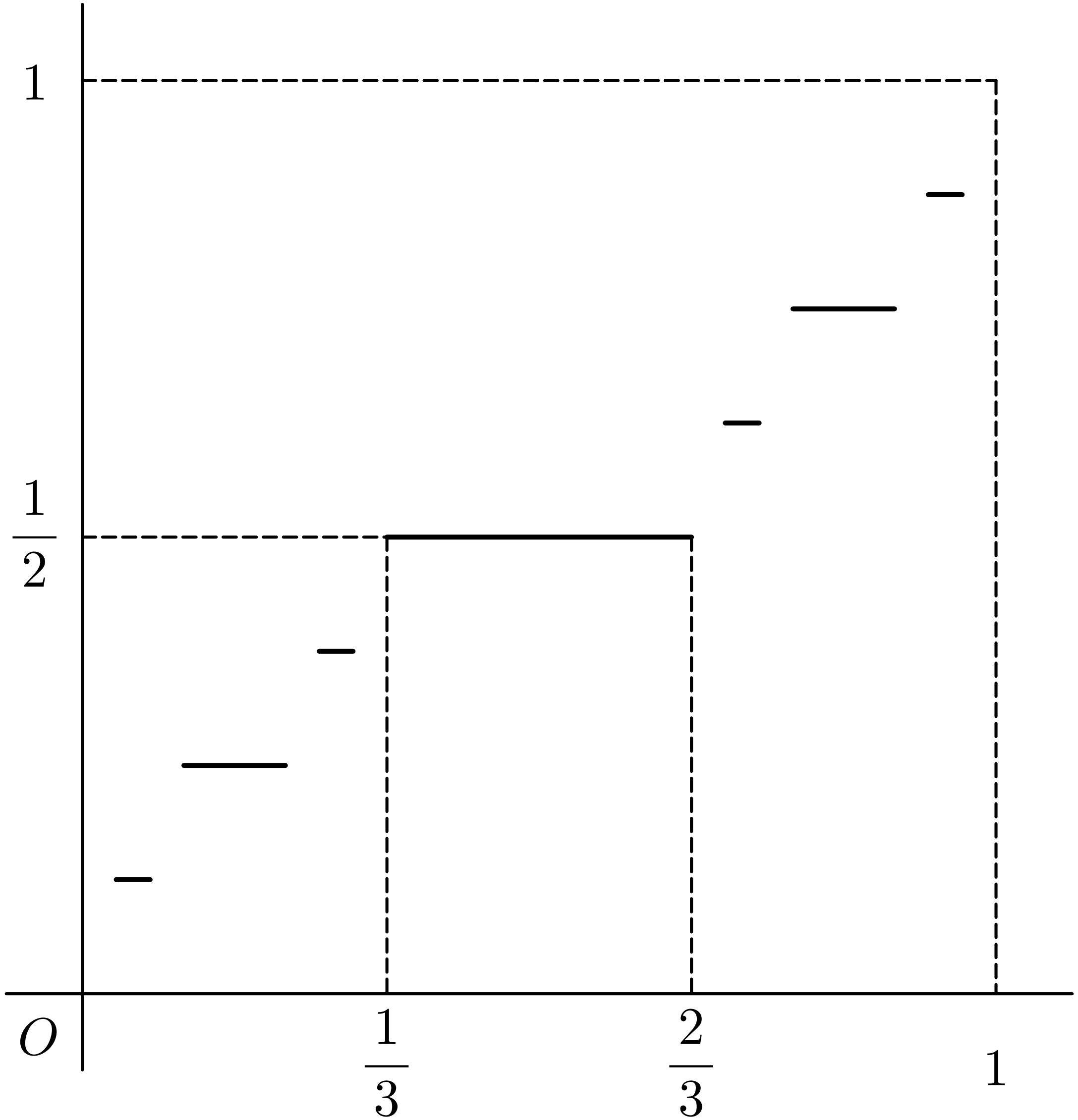

図 9: 第三段階

さまざまな曲線（悪魔の階段）

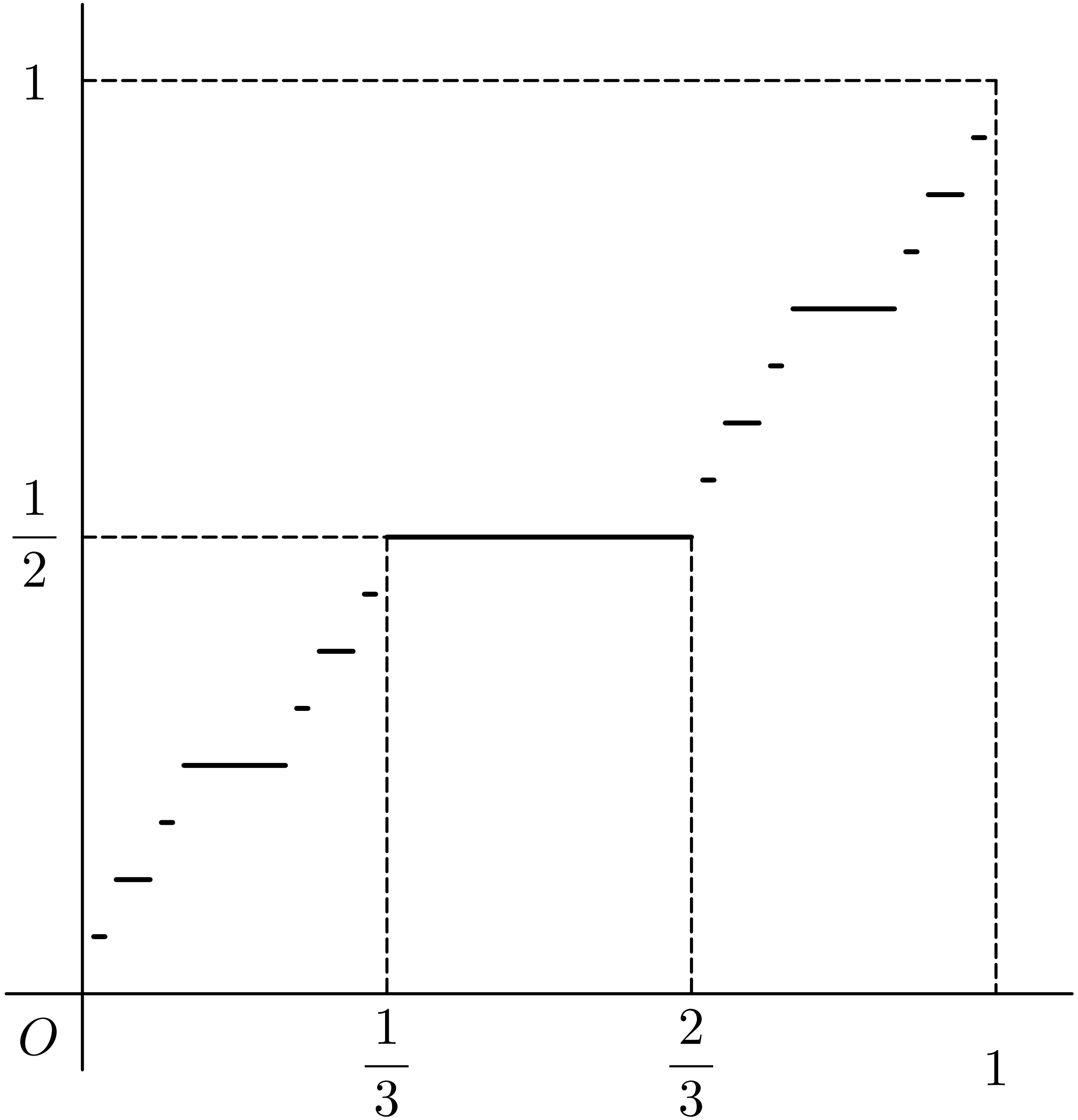

図 10: 第四段階

さまざまな曲線（悪魔の階段）

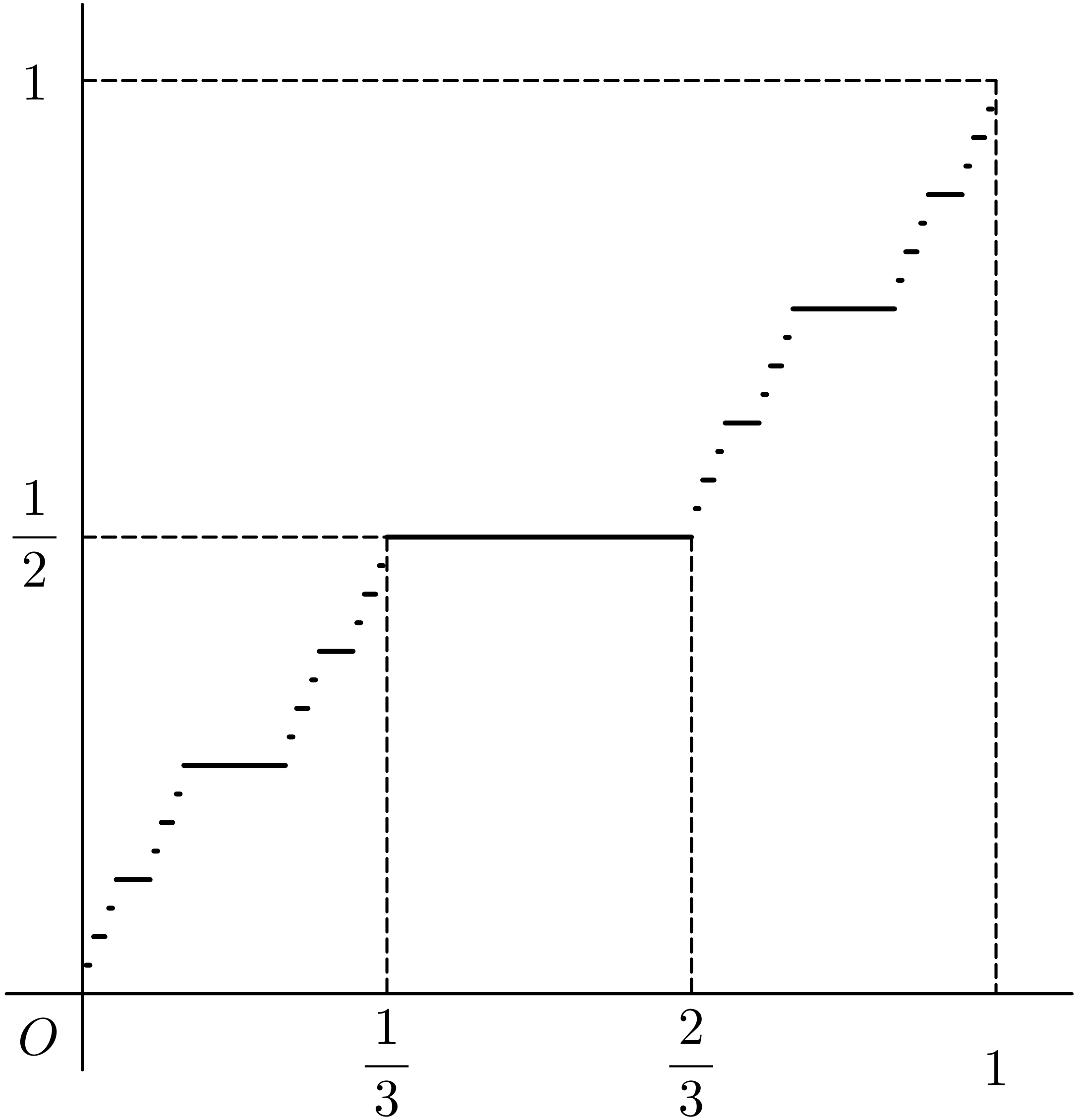

図 11: 第五段階

さまざまな曲線（悪魔の階段）

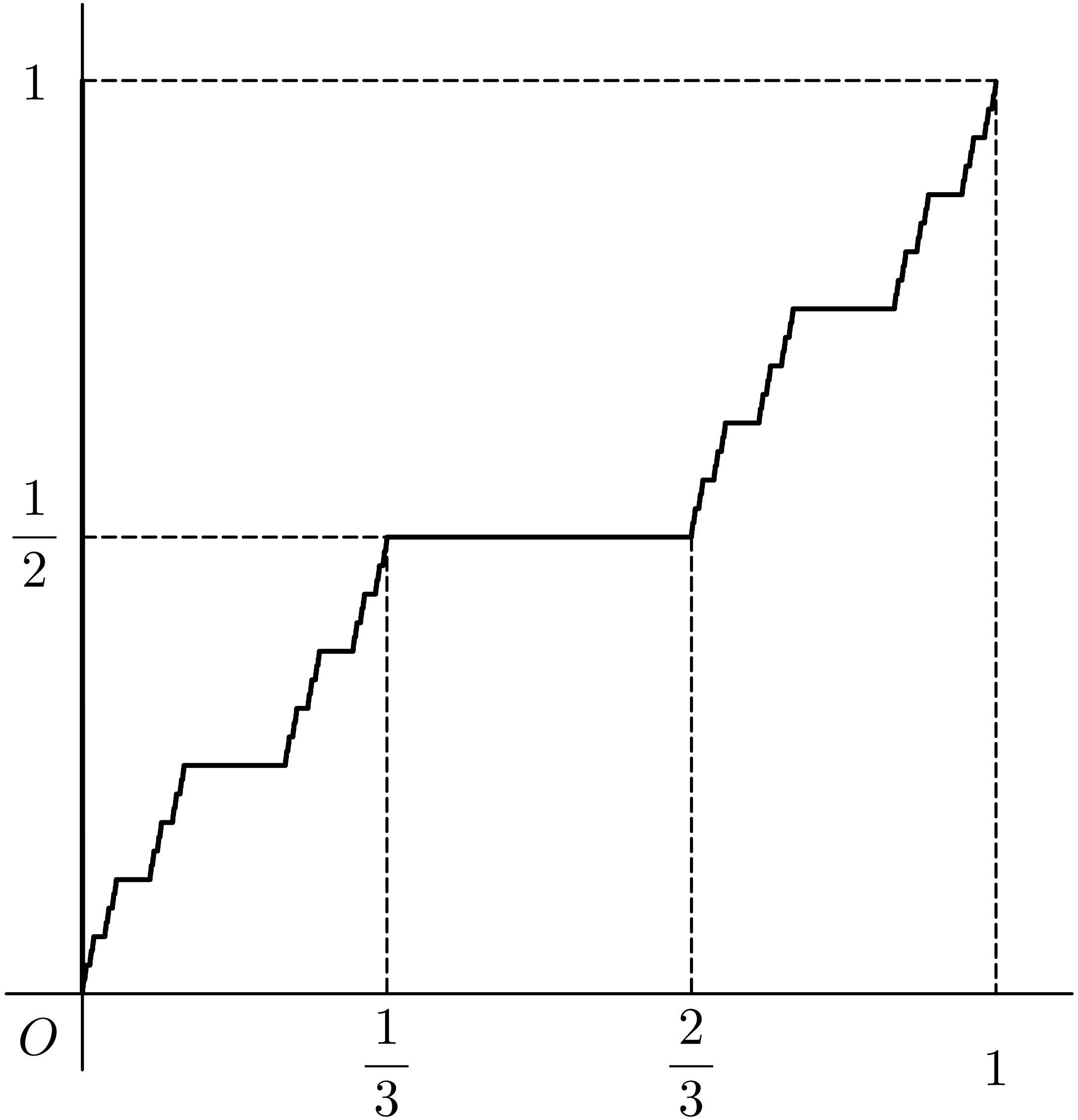

図 12: 悪魔の階段（再掲）

さまざまな曲線（悪魔の階段）

第 k 段階のグラフに斜めの線を足したものを D_k とすると, D_k は D を近似している.

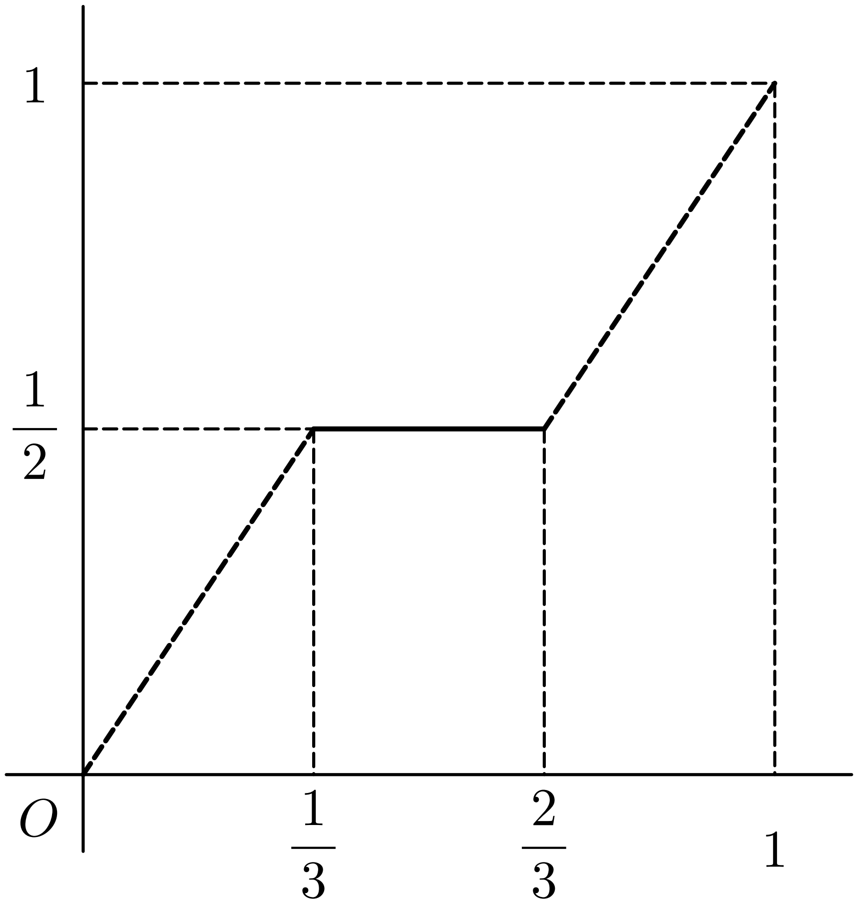

図 13: D_1

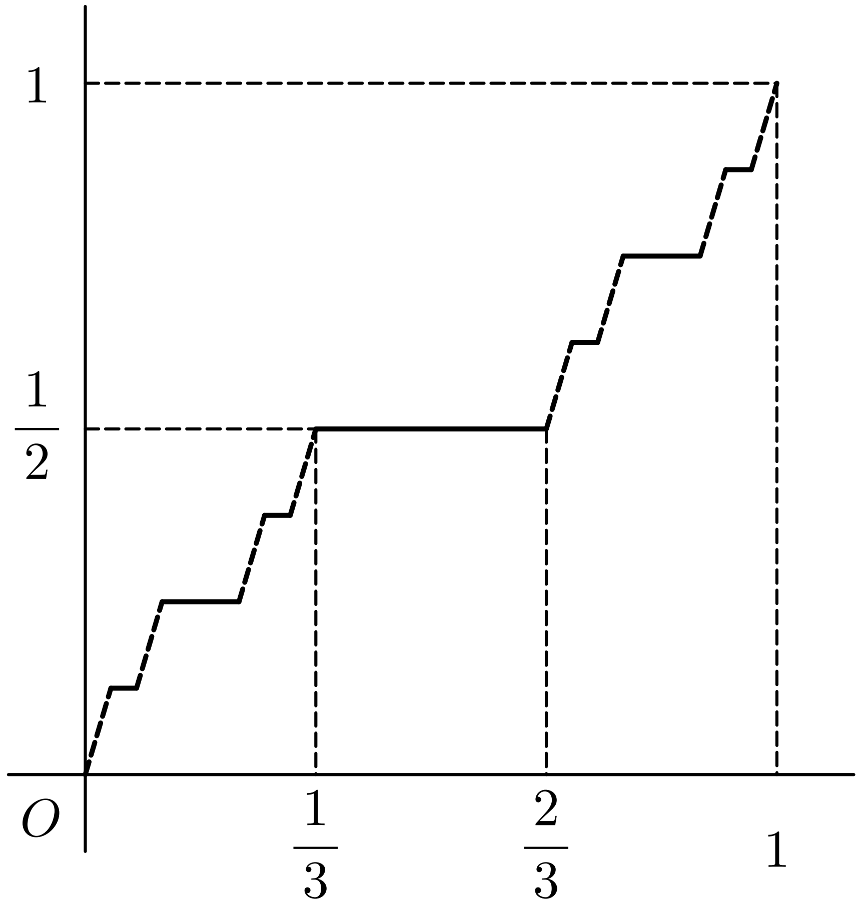

図 14: D_3

さまざまな曲線（悪魔の階段）

$$
\begin{aligned}
\ell(D_k) &= \text{水平な部分} + \text{斜めの部分} \\
&= \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \cdots + \frac{2^{k-1}}{3^k} + 2^k \sqrt{\left(\frac{1}{3^k}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^k}\right)^2} \\
&= \frac{1}{3} \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^k}{1 - \frac{2}{3}} + \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^{2k} + 1}
\end{aligned}
$$

このことから $\ell(D) = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} + \sqrt{1} = 2$ であることが

期待されるが，実際にその通りになっている．

さまざまな曲線（高木函数のグラフ）

例 3.2.

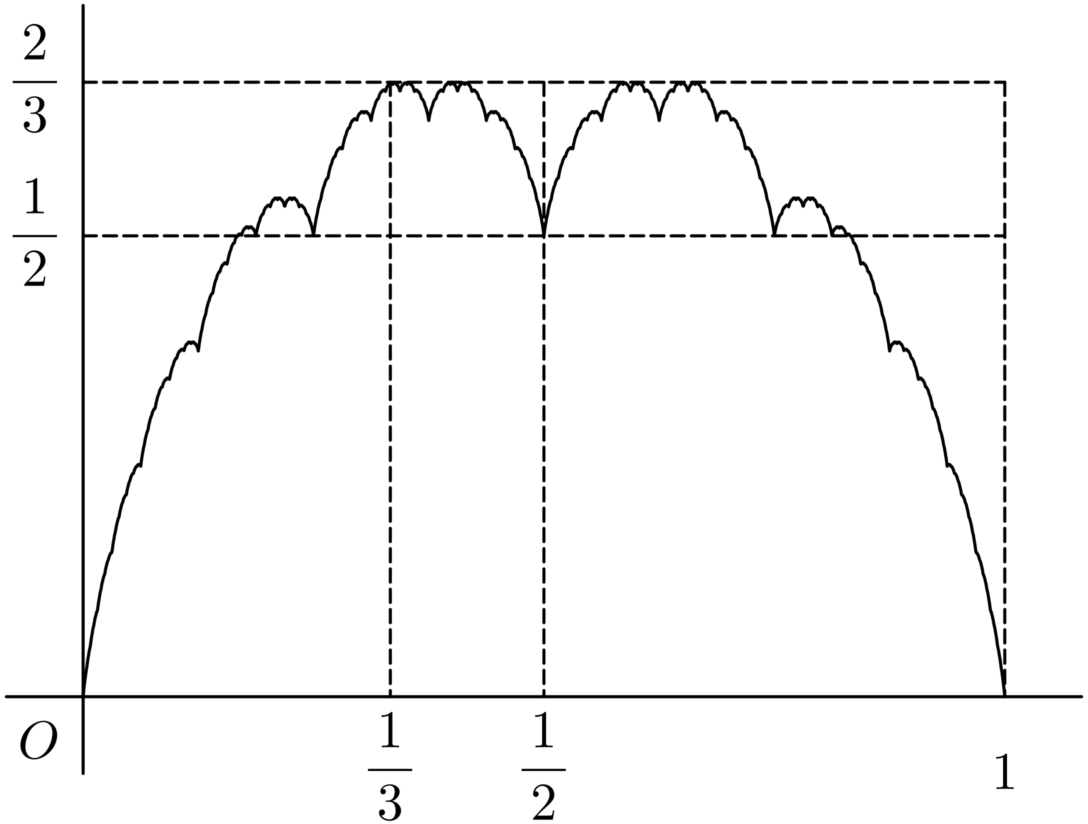

図 15: 高木函数のグラフ

さまざまな曲線（コッホ曲線）

例 3.3.

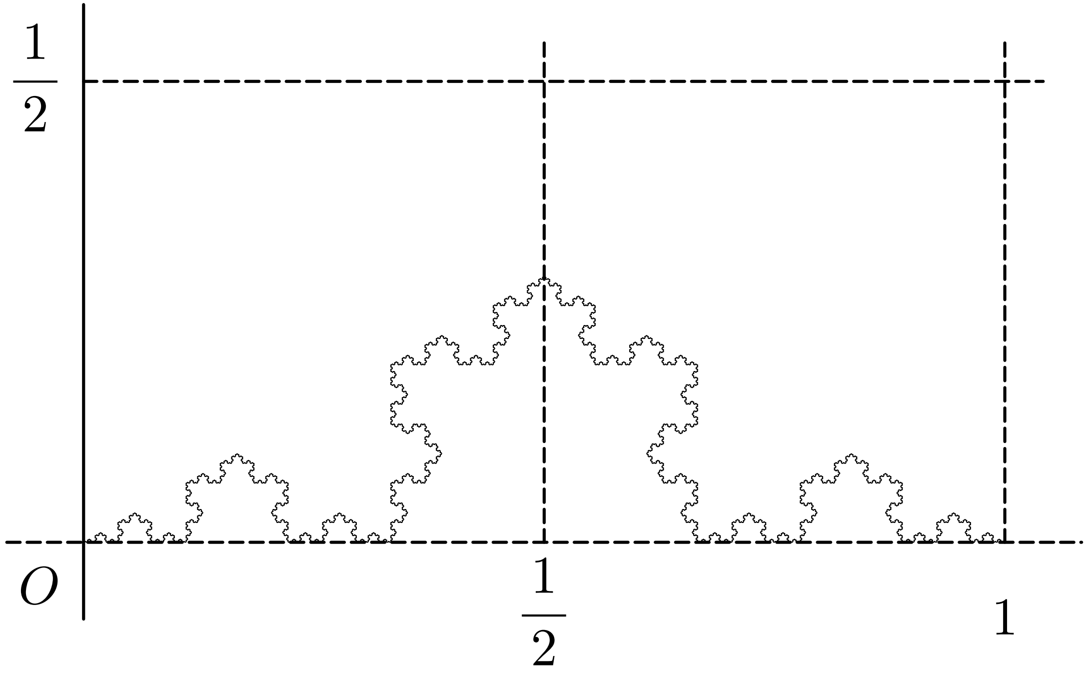

図 16: コッホ（Koch）曲線

高木函数のグラフやコッホ曲線の長さは無限大

$\Longrightarrow$ 長さを用いても区別できない

さまざまな曲線を比べる

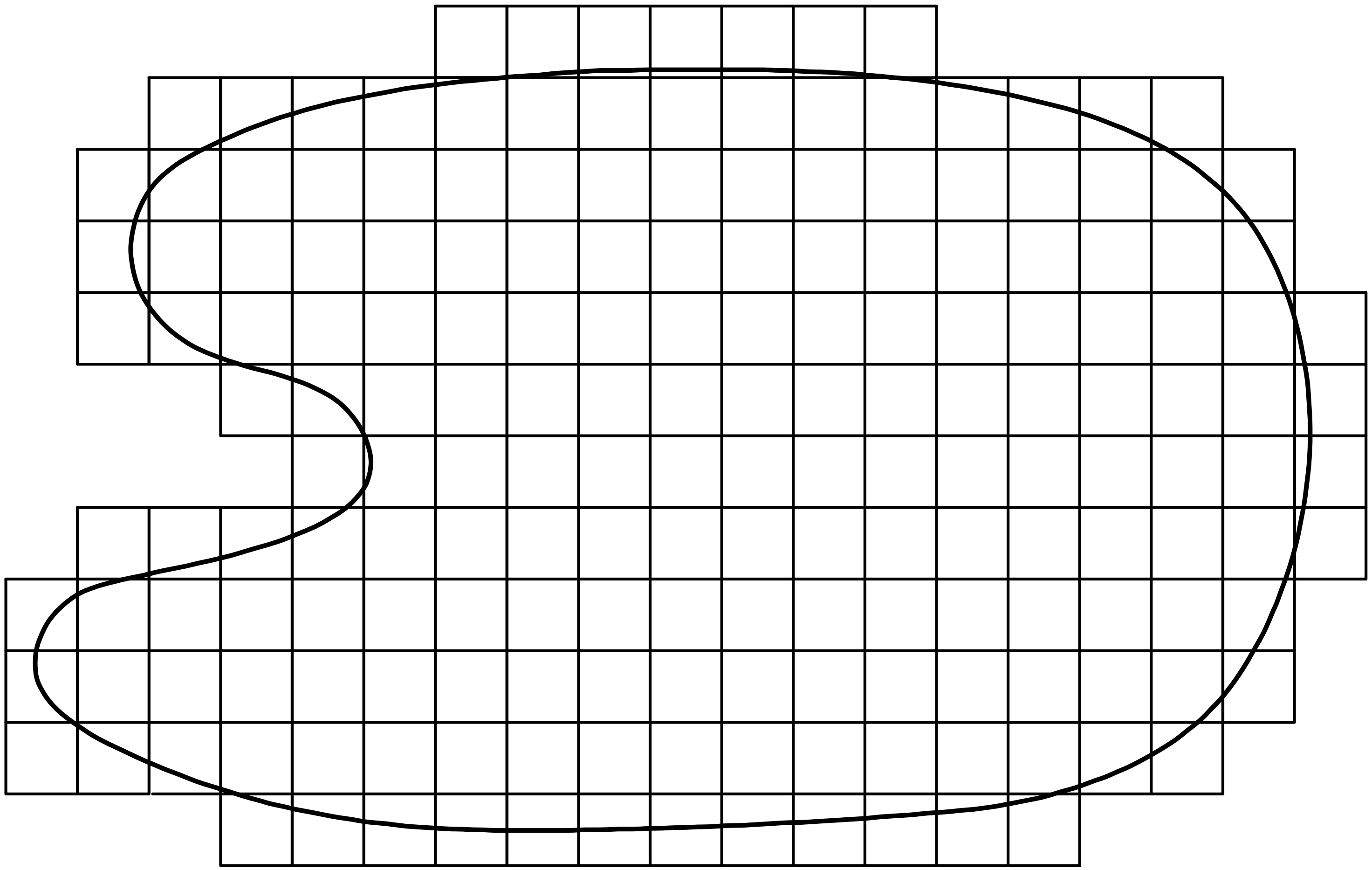

図 17: 面積の求め方

さまざまな曲線を比べる

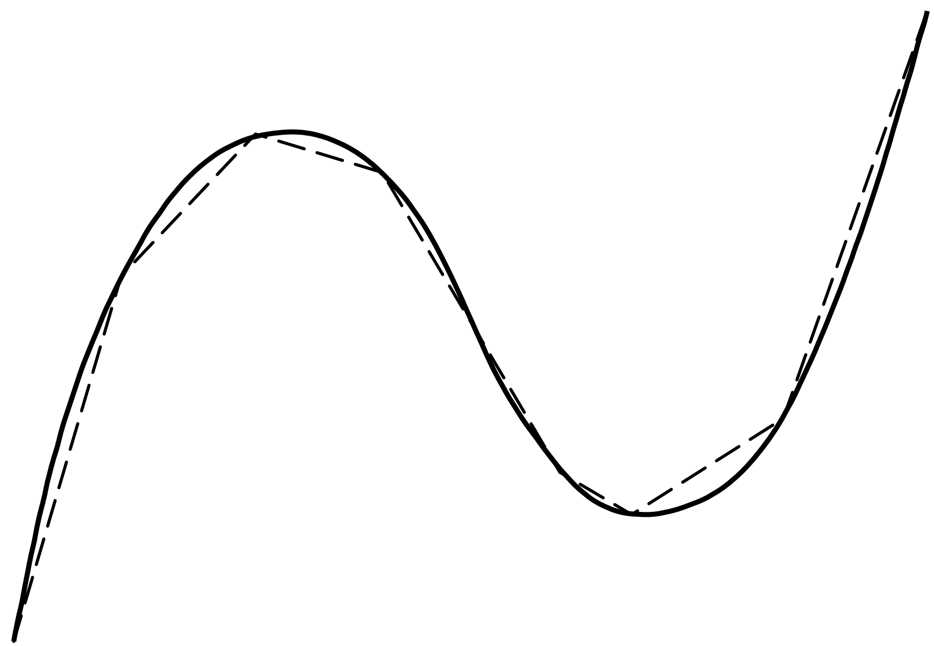

図 18: 折れ線による近似

さまざまな曲線を比べる

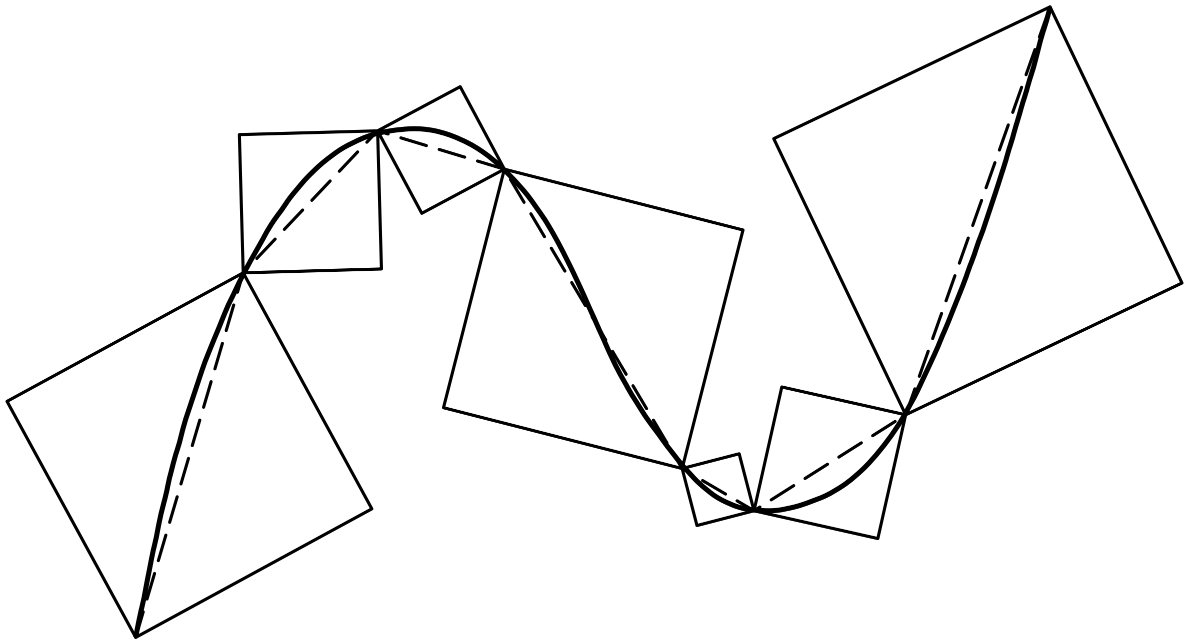

図 19: 正方形でも構わない

さまざまな曲線を比べる

求める量	足し上げる量
長さ	一辺の長さ
面積	一辺の長さの二乗

さまざまな曲線を比べる

$$h_s^r(R_1, \cdots, R_k) = \sum_{i=1}^{k} (R_i \text{ の一辺の長さ})^s$$

ただし R_i の対角線の長さは r 以下とする.

$$H_s^r(C) = \inf_{\text{近似 } R_1, \cdots, R_k} h_s^r(R_1, \cdots, R_k)$$

inf は長さを定めた時に用いた sup の「最小値」版
（下限と呼ばれる）

※ 本当は $H_s^r(C)$ のこの定義は正しくなく,
　もう少し工夫が要る.

さまざまな曲線を比べる

$H_1^r(C) =$ 直線の長さの定義に現れた折れ線の長さ

$$H_2^r(C) = \begin{cases} \text{図形 } C \text{ を正方形で近似した時の，近似する} \\ \text{図形の面積} \end{cases}$$

さまざまな曲線を比べる（ハウスドルフ測度）

定義 3.4.

$$H_s(C) = \sup_{r>0} H_s^r(C)$$

と定め，C の s-次元ハウスドルフ（Hausdorff）測度と呼ぶ.

曲線 T や K に相応しい s の値は？

s	0		1		2	
H_s(直線)	∞	∞	有限	0	0	0
H_s(正方形)	∞	∞	∞	∞	有限	0

さまざまな曲線を比べる（ハウスドルフ次元）

定義 3.5 (ハウスドルフ（Hausdorff）次元).

$$\dim_H C = \inf \{s > 0 \mid H_s(C) = 0\}$$

と置き，C のハウスドルフ次元と呼ぶ.

・直線のハウスドルフ次元は 1

・正方形のハウスドルフ次元は 2

さまざまな曲線を比べる（ハウスドルフ次元）

$\dim_H C = s$ とはどのような意味か？

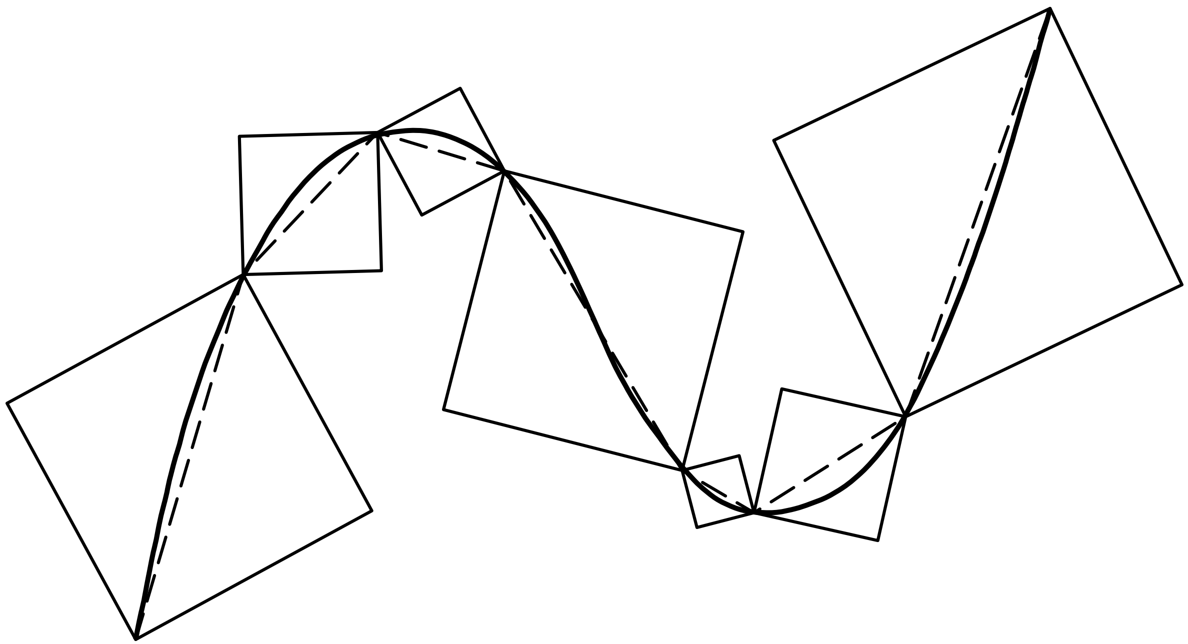

図 20: 正方形による近似（再掲）

近似する正方形も含めて図を全体として r 倍すると近似している正方形の辺の長さの s 乗は r^s 倍される.

$$H_s(rC) = r^s H_s(C)$$

$$r^s = \frac{r\text{ 倍して得られる図形の }s\text{ 次元測度}}{\text{元の図形の }s\text{ 次元測度}} = \text{体積比}$$

$$s = \log_r \text{体積比} = \frac{\log \text{体積比}}{\log r}$$

$$\dim_H K = \frac{\log 4}{\log 3}, \quad \dim_H T = \dim_H D = 1$$

さまざまな曲線を比べる（ハウスドルフ次元）

曲線	長さ	次元
D	2	1
T	∞	1
K	∞	$\dfrac{\log 4}{\log 3}$

さまざまな曲線（ヒルベルト曲線）

例 3.6.

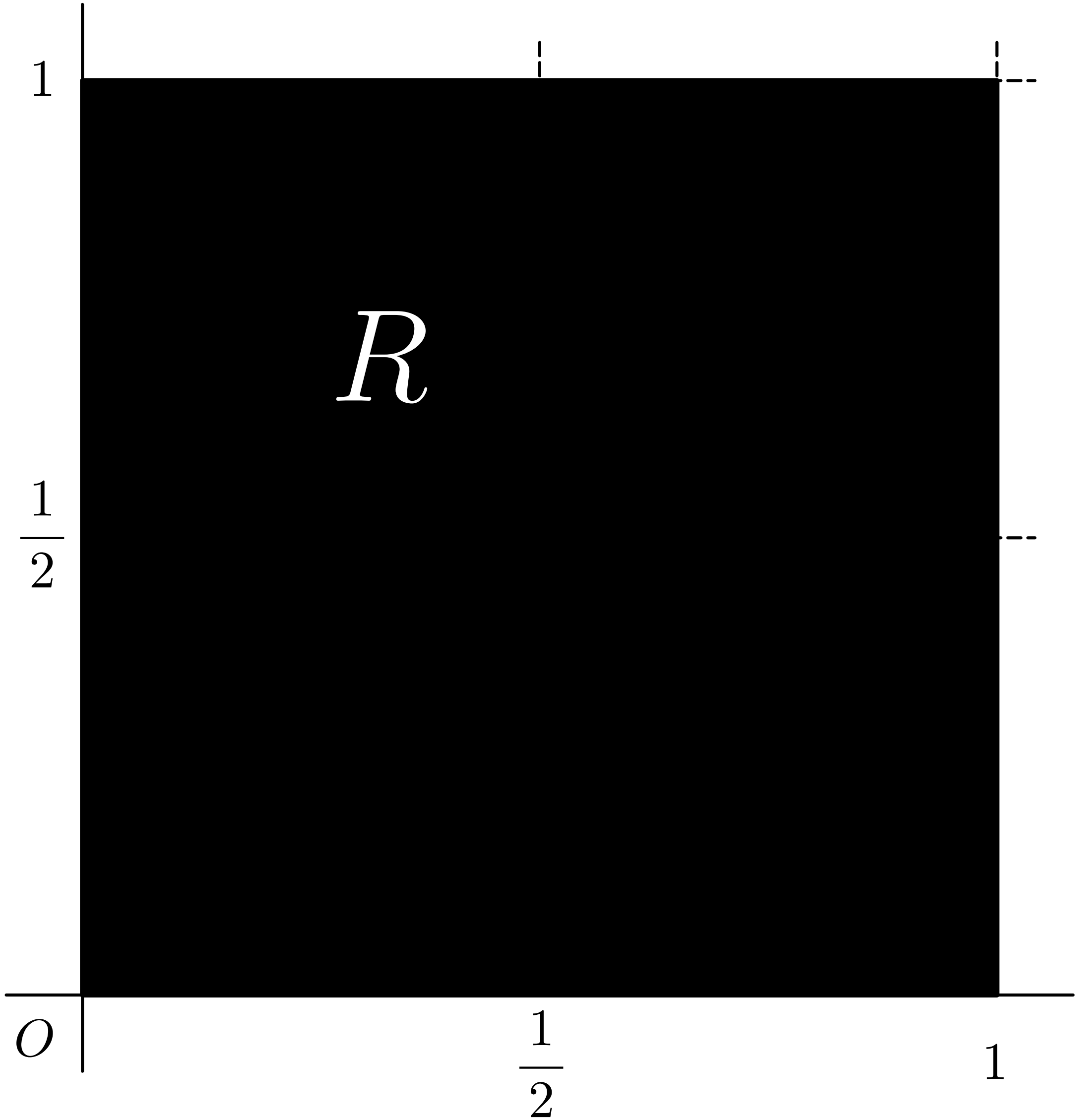

図 21: ヒルベルト曲線

さまざまな曲線（ヒルベルト曲線）

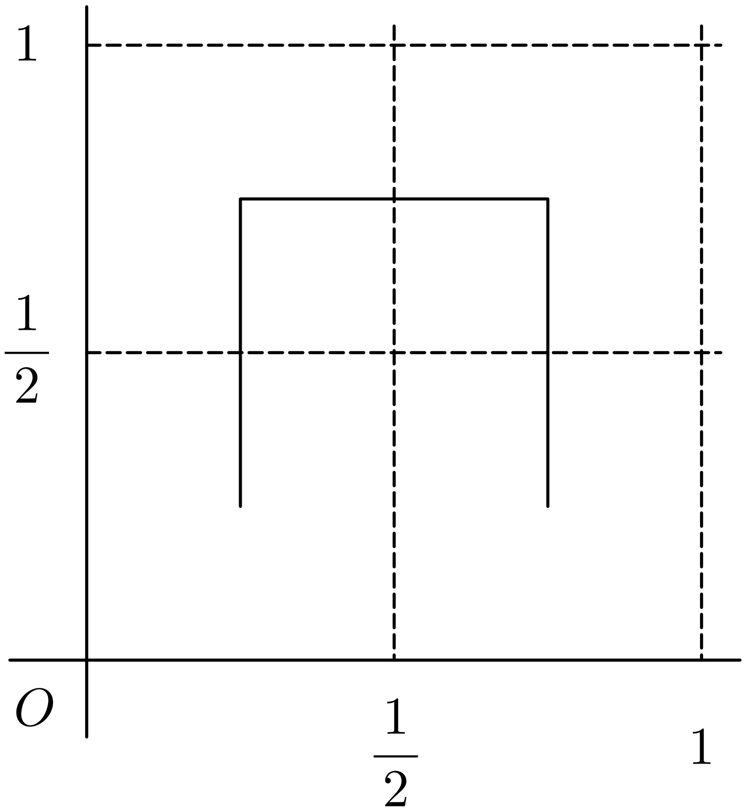

図 22: 最初の段階

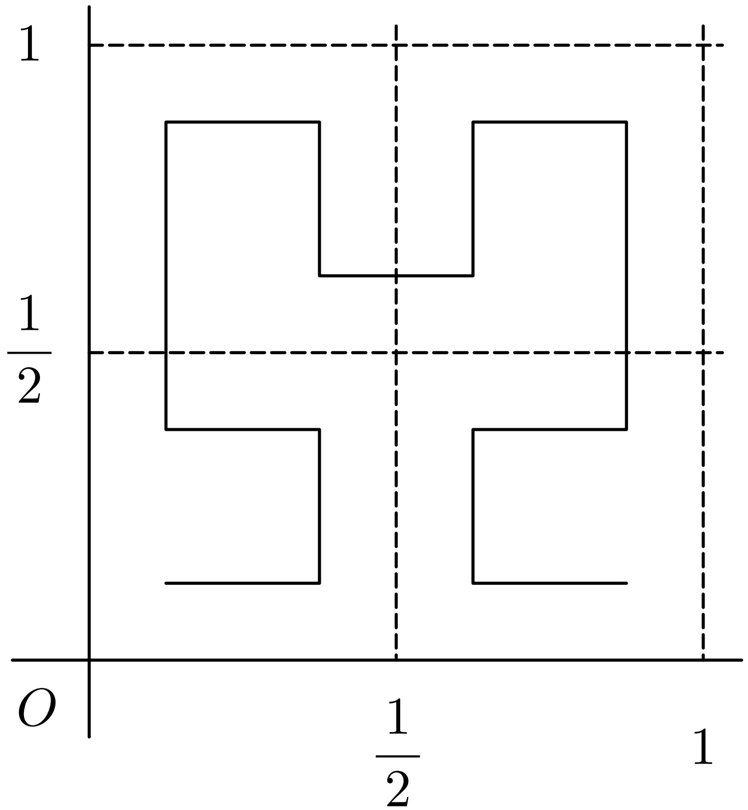

図 23: 第二段階

さまざまな曲線（ヒルベルト曲線）

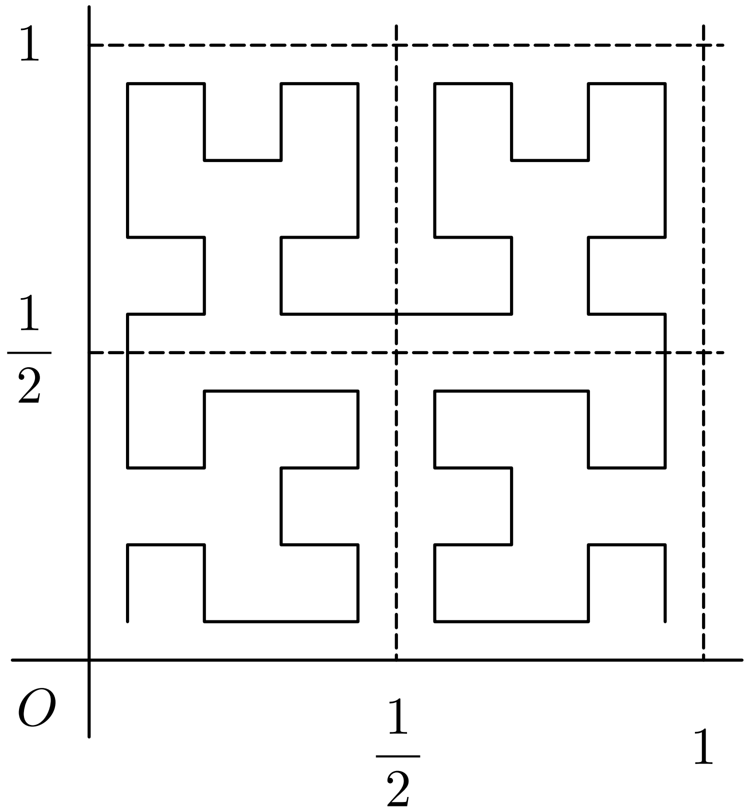

図 24: 第三段階

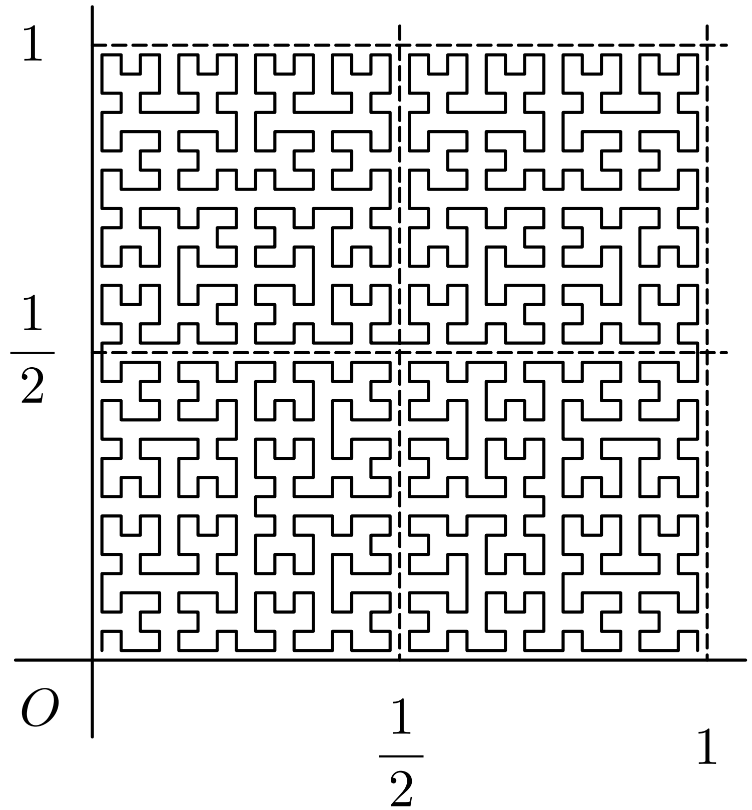

図 25: 第五段階

さまざまな曲線（ヒルベルト曲線）

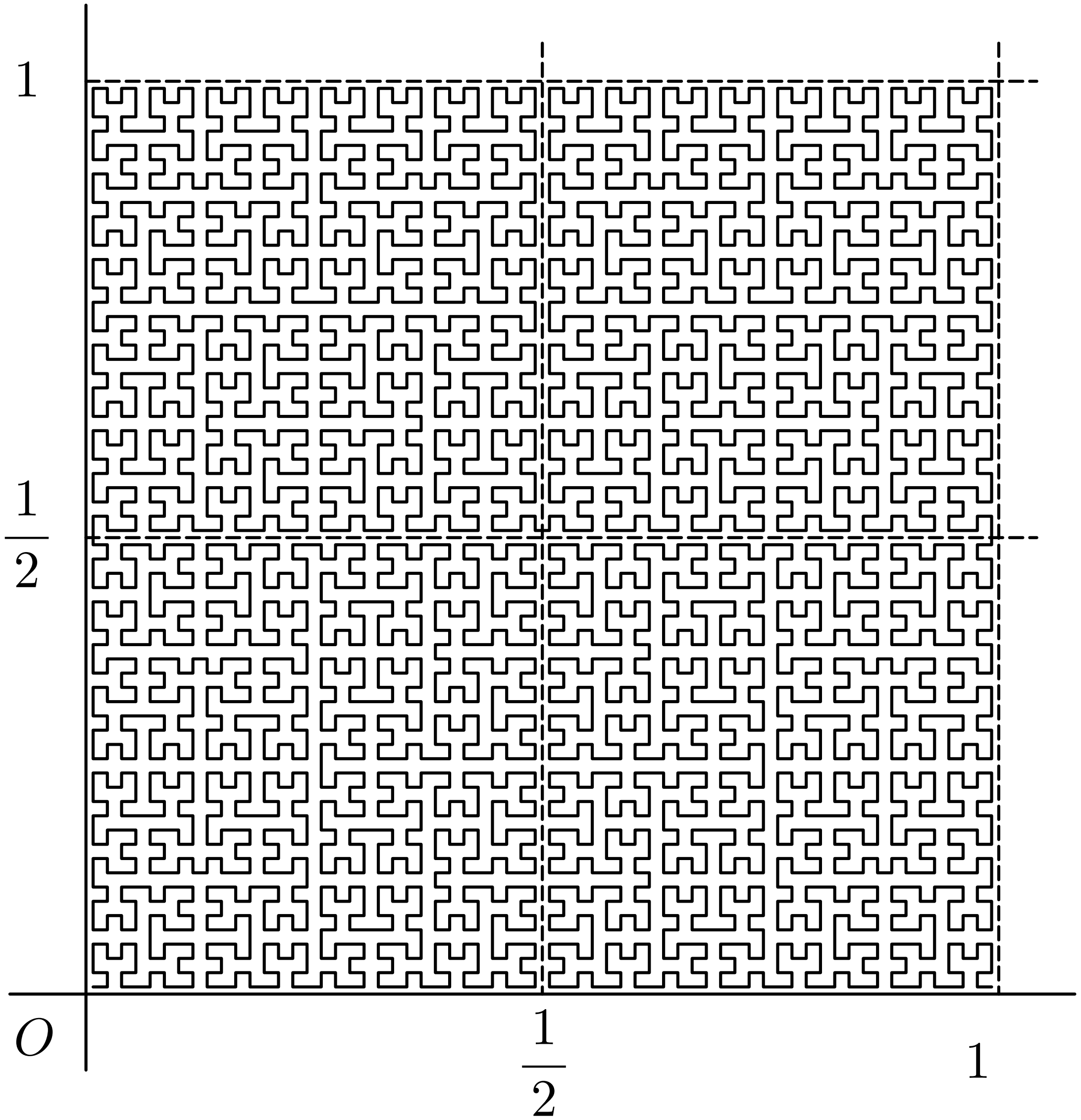

図 26: ヒルベルト曲線（第六段階）

見えているようで
いろいろなものが見えていない

曲線という目に見えて紛れが一切なさそうな対象でも，

それを数学的に捉えることは意外に難しい

参考文献

[1] フラクタル曲線についての解析学 —擬等角写像外伝—，谷口 雅彦著，培風館，2004.

[2] フラクタル集合の幾何学，K.J. ファルコナー著，畑 政義訳，近代数学社，1989.