空間とその曲がり方について：曲面・多様体と曲率

足助 太郎

２００４年１１月２３日

２００４年度公開講座「目に見えない世界の幾何学」

曲面や多様体はさまざまに「曲がって」います. 素直に考えると「曲がっている」曲面や多様体は複雑な形をしているように思えますが, 実際にはどうでしょうか？ここでは, 「曲率」や「基本群」と呼ばれる概念と関連させてこのことについて考えてみましょう. 曲面が全ての場合の基本ですので, ここでは曲面を主に考えます.

1. 曲率.

そもそも曲面は数学的にはどのように扱えばよいでしょうか？本当はどこかで折れ曲がっていたり, 角があるようなものも扱いたいところですが, 今日はそういうものはやめておきます.

曲面全体を一度に把握するのは難しそうですから, 一度これをばらばらに分けてみましょう. 本当に切ってしまうと張り合わせるのが大変なので, 「のりしろ」をつけた状態にします.

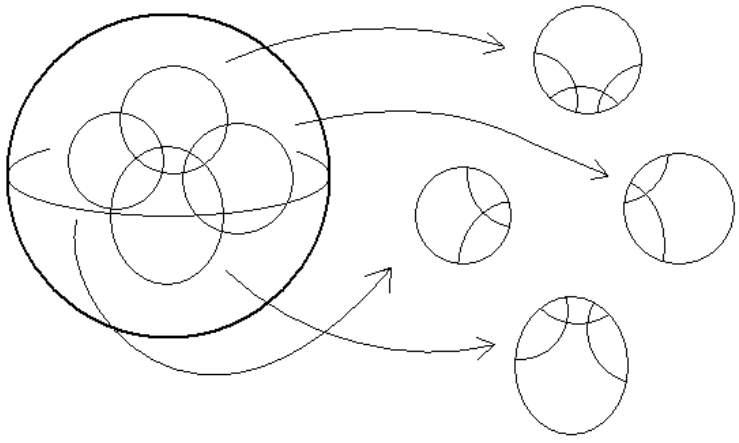

fig.1 曲面をのりしろ付きに分割する

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

こうしてしまえばそれぞれの部分は少しゆがんでいますが, おおよそ円盤と思って良さそうです. これらの円盤や, そもそも元の曲面はいつも平らでしょうか? 球面を考えてみると分かるように, いつも平ら, という訳には行かなさそうです.

もう少し詳しく調べるために, 次のように「平ら」という概念を緩めることにします. つまり,

平らな紙（の一部）をしわになったり, 折ったりしないで
貼ることが出来る部分を新たに「平ら」と呼ぶ

ことにします.

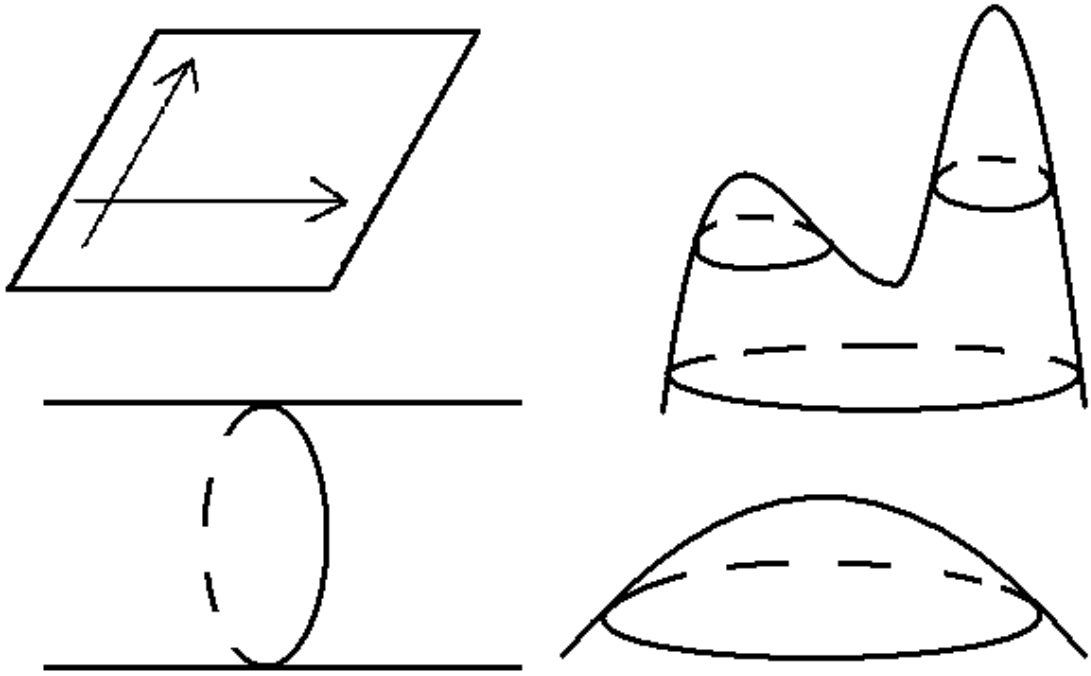

fig.2 平らな面と平らでない面

まず, 平面には紙が貼れますからこれは平らです. また, 茶筒はやはり平らです. 一方, 球面は紙を貼ろうとするとしわになってしまいますので, 平らではありません. ただ, 紙はしわになっているものの, 紙を球面全体を覆うように貼り付けることは出来ています. 先に進む前に「しわになってしまう」ことを良く考えてみましょう. これは球面から見ると「紙が余ってしまうので一部が重なってしまっている」ことになっています.

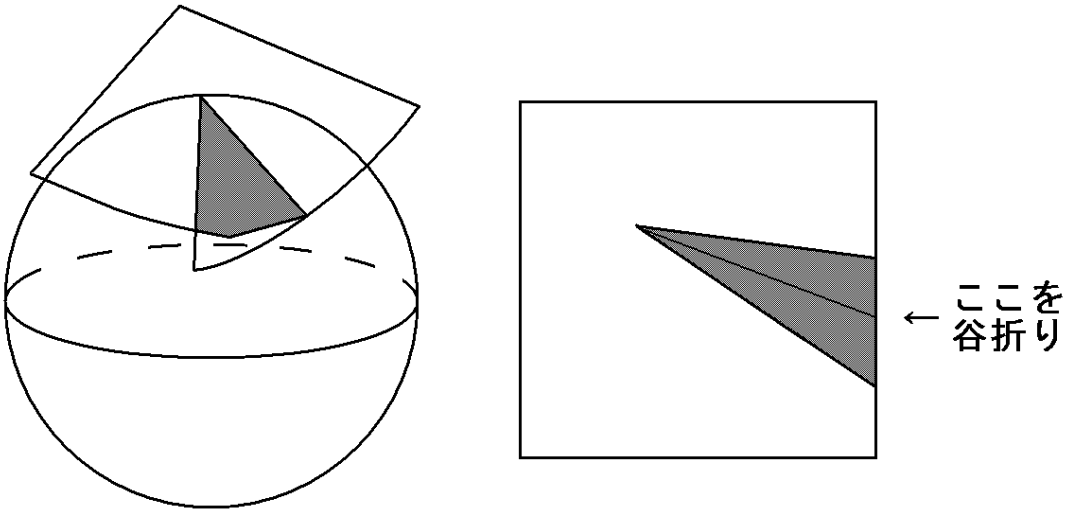

fig.3 球面に紙を貼り付けるとどこか重なる

本当にそういう細工が出来るかどうかは器用さによりますが, この重なっている部分を紙から除いてしまっても, 球面全体を覆うように紙を貼ることが出来ます. したがって, ある意味で球面は「平らな曲面より面積が少ない」ことになります.

紙が余ることがあるのであれば, 紙が足りないことはあるでしょうか? 例として, 馬の鞍を考えてみましょう.

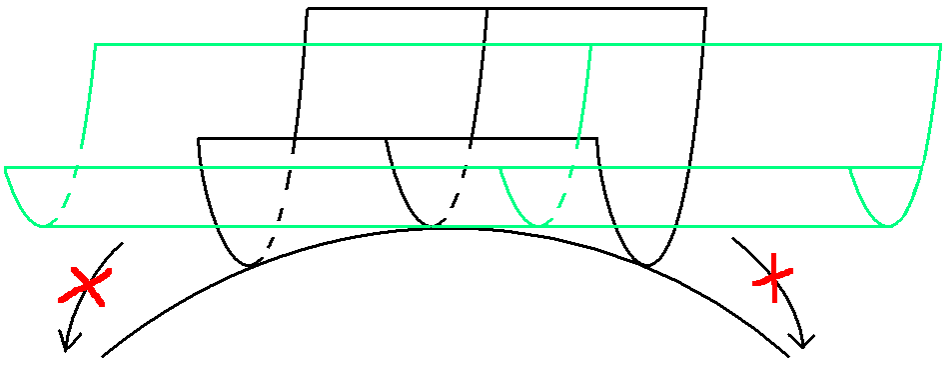

fig.4 馬の鞍に紙を貼ろうとしても突っ張ってしまって貼れない

一見, 真ん中のあたりを大分余らせておいてしわにすれば紙が貼れてしまうように思えますが, どんなに紙をあらかじめ余らせておいても, 鞍の本当に真ん中の点の所で拡大図を描くと結局上の図と同じになってしまいます.

これを解決するためには, 紙に切込みを入れて下側に曲げられるようにするのがよいでしょう. 少し隙間が出来てしまったので, 別の紙を持ってきてこの部分をふさげば, 何とか馬の鞍も紙で覆うことが出来ました. （下の図では一箇所しか切込みを入れていませんが, 本当は無限個の切込みを入れる必要があります.）

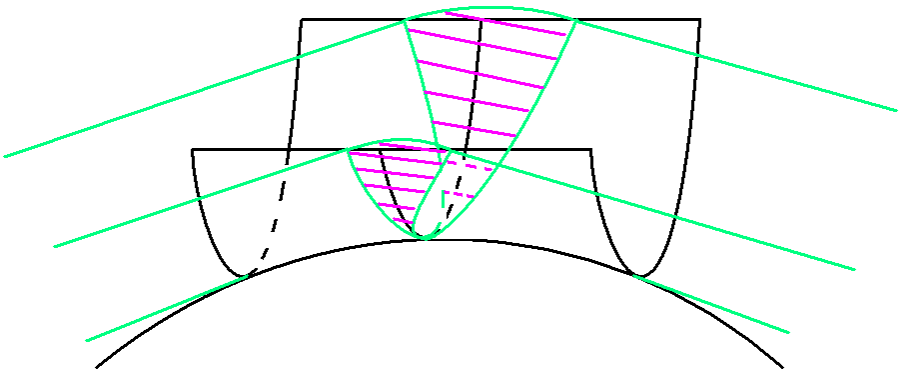

fig.5 切込みを入れて別の紙を継ぎ足せば馬の鞍を紙で覆うことが出来る

別の紙を持ってこないと覆えないのですから, もともとの紙は足りなかったことになりますし, 馬の鞍は紙よりも「面積が大きい」ことになります.

こうしてみると, 曲面には少なくとも,

1) 平ら（紙が過不足無く貼れる）
2) 紙が余る
3) 紙が不足する

の３種類あるようです. 実は今の考え方は, 長さと角度を曲面上でうまく考えると数学的に正当化することが出来て, この３種類への分類は意味を持つことが分かります. 数学的に表現すると, 曲率という言葉を用いて

1) 曲率 $= 0$
2) 曲率 > 0
3) 曲率 < 0

ということになります. それぞれどんな例があるかもう一度考えてみましょう.

・まず, 2) の例としては, たとえば球面が挙げられます.

・次に, 1) の例として平面や茶筒が挙げられます. ただ, これらは無限に広がっているか, あるいは端があったりして, 球面とは少し様子が異なります. 球面のように無限に広がっているわけでも, 端があるわけでもないような例は少し難しくなって, トーラス（一人用の浮き輪）と呼ばれるものになります. トーラスは輪切りにすると大体茶筒になります. そこで, トーラスを考える前に茶筒を本当に平面と思うことが出来ることを説明します. 前にも述べたように茶筒は平らでした. 平らなので平面の

上に正確な「地図」を作ってみます．やり方はいろいろありますが，ここではまず巨大な紙を考えて，それを茶筒に巻きつけてみましょう．当然何重にも巻きついてしまいますが，それは気にしないことにして，紙にどんどん地図を描いていきます．すると次のようなものが得られます．

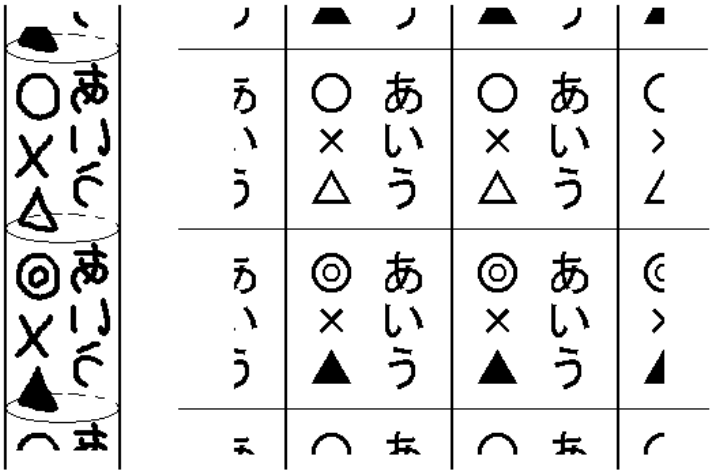

fig.6 紙に描いた茶筒の地図

この地図には，同じ部分が規則的に現れるという特徴があります．

これをふまえて，トーラスを考えましょう．これにはどう見ても紙をぴったり貼り付けることは出来ないので，見かけの絵から離れる必要が出てきます．

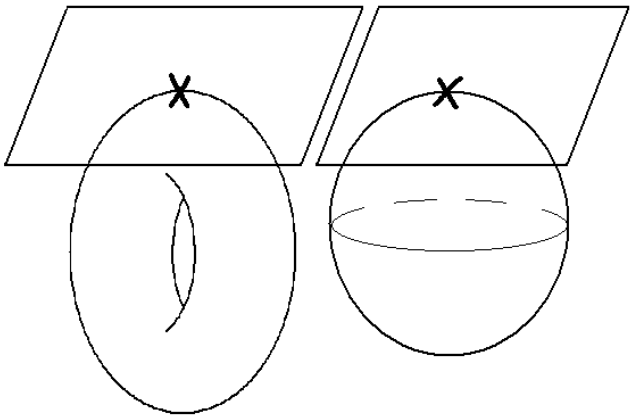

fig.7 トーラスには紙はぴったりと貼り付けることが出来ない

先ほどのようにトーラスを輪切りにすると，切り口はいつも同じ円周です．このような切り口の方向に進むのであればいつもどこで測っても長さは同じです．今度は切り口に垂直に円周を描いて，その上を進んでみます．明らかに内側のほうが外側より長さは短くなってしまっていますが，これを物差しのせいにしてしまって，本当は内側も外側も長さは同じだと考えてみましょう．

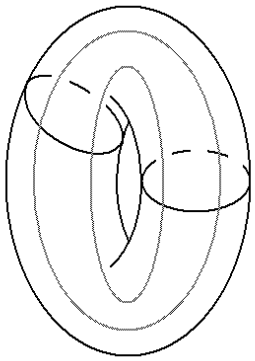

fig.8 内側は短くみえるがそれは錯覚である

どんどん図を描いていくと, 本当は元に戻ってくるはずの所でも戻ってきませんが, あまり広い範囲で考えなければ破綻のない地図が茶筒上に描けています.

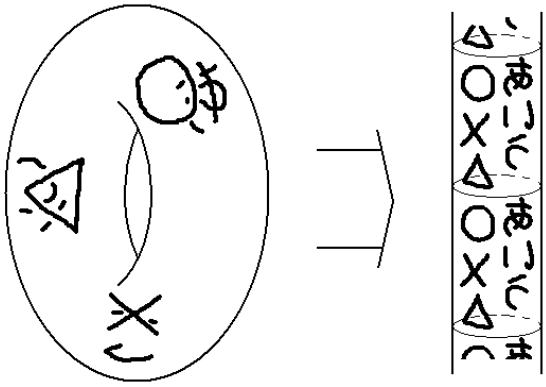

fig.9 内側が短いのは錯覚である, として茶筒の上に描いたトーラスの地図

この地図は先ほどの茶筒の地図と同様の特徴を持っています. つまり, 同じ図が繰り返し規則的に現れます. 茶筒の地図はもう知っていますから, それをもう一度描くと, 平面上にトーラスの地図を描くことが出来ました.

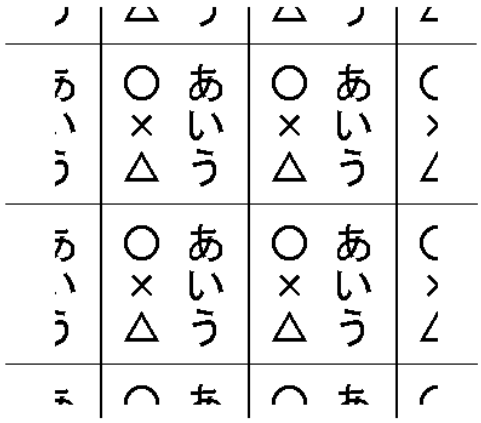

fig.10 「平らな」トーラスの地図

地図が描けてしまったということは, 逆に言えば紙を貼り付けることが出来るわけですから, 平らなトーラスがこれで出来上がりました. この平らなトーラスは, 長さの測り方が普通に絵に描いたトーラスとは異なることを強調しておきます.

・最後に, 3) の紙が足りない場合は結構大変で, ここでは詳しくは説明出来ません. 結論としては, トーラスの場合と同じ方針で考えることが出来て, 穴が $g(>1)$ 個ある閉曲面（g 人用の浮き輪）を考えればよいことになります. 地図に現れる図形は今度は四角形ではなく, $4g$ 角形になります.

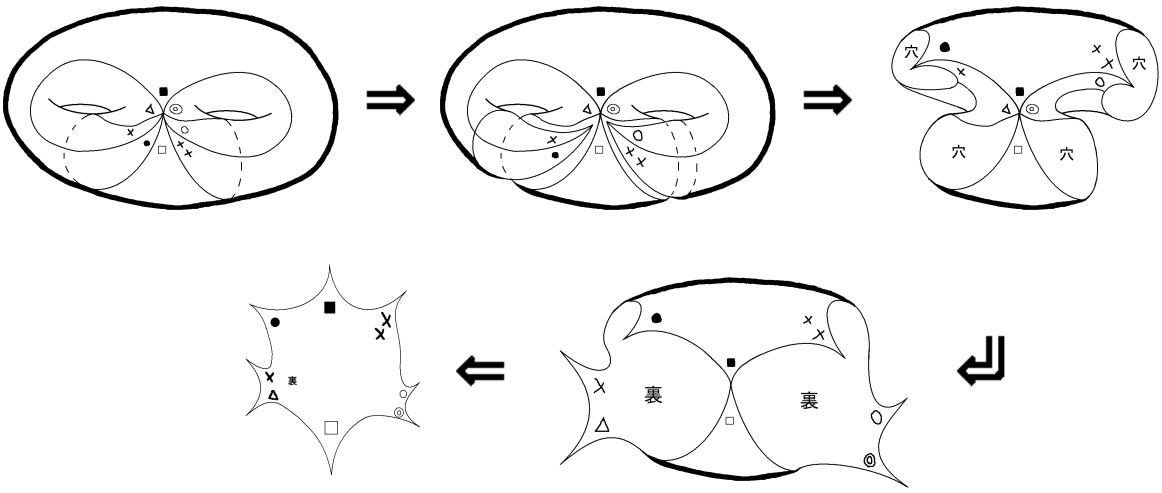

fig.11 穴が 2 個ある閉曲面を切り開くと八角形に出来る

今は「平ら」でないものを考えていますから, 地図は平面上にはどうやっても描けません. つまり, この $4g$ 角形は平面には（長さか角度が狂ってしまい）地図としては描くことが出来ないものです. 正確に言えば「ユークリッド平面のどの一部分とも等長的ではない」ものです.

2. 基本群.

基本群とは大雑把（いい加減）に言うと, 「曲面の上に書ける閉曲線の種類」のことです. もう少し具体的に言うと, 曲面の上に「丸」を書くことを考え, その際少しずつずらして同じ形に出来るものは同じものとみなしてしまうことにします. (本当は基本群はもっと精密に定義しないといけませんが, ここでは差し支えのない範囲で簡略化してあります.)

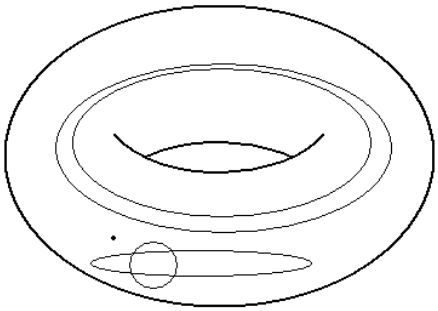

fig.12 同じ閉曲線・異なる閉曲線

球面上に丸を描くと, どんどん北極にずらしていってしまえば小さくなってしまい, 最後は点になってしまいます. したがって, 球面の基本群は { 一点 } です.

トーラスの基本群を考えるために, 先ほどの「地図」を思い出しましょう. トーラスの地図は平面に格子状に同じ模様が並んでいるものでした. この上に基本群の元, 即ち, 閉曲線を書いてみることにします. 出発点を一つ決めなければいけませんので, 四角形の真ん中にしましょう. これを p とします. 地図上に他にこの点を表す部分はどこにあるかと言えば, 同じ模様が格子状に並ぶのですから, 各四角形の真ん中です. これらを p のコピーと便宜的に呼びましょう. p のコピーはトーラス上では p を表します. さて, そもそもトーラス上の閉曲線とは, トーラスの上では p から出発して p に戻って来る曲線のことです. 地図の上でも p から出発して p に戻ってくる曲線はトーラスの閉曲線を表します. ところで, 地図の上で p から出発した曲線が p のあるコピー q を通るとしましょう. これは地図の上では閉曲線ではありません. ではトーラスの上ではどうでしょう. q はトーラスの上では p になってしまうのですから, この曲線はトーラス上では p から出発して p に戻ってきてしまいます. つまり閉曲線です.

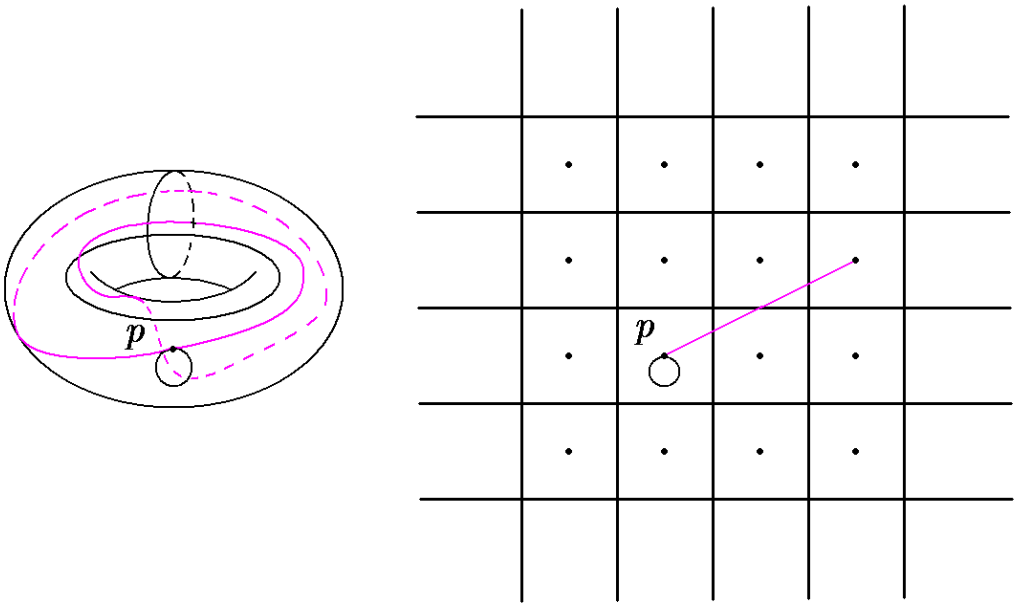

fig.13 p と p のコピーを結ぶ地図上の曲線はトーラスの閉曲線を表す

実はトーラスの閉曲線はこのように, 地図上では p と p 自身, あるいは p と p のコピーを結ぶ曲線として過不足なく表されることが知られています. 今の場合には, 終点はちょうど整数の組 (k,l) とちょうど一対一に対応していますから, 基本群は整数の組全体 $\{(k,\ell)\}$ と考えることが出来ます. 地図上で「右に行って上に行く」ことと, 「上に行って右に行く」ことが同じですが, これは大きな特徴ですので, 覚えておいてください.

穴が 2 個以上の閉曲面の場合, つまり曲率が負の場合にも同じようなことが出来ます. 今度は本当は平面上では正しい図は描けないのですが, そのあたりは「長さと角度」をうまく使うと厳密に話をすることが出来るので, ここでは大目に見ることにして話をします. 穴が 2 個の場合, トーラスの地図の「四角形」に対応するものは八角形でした. トーラスの場合には四角形を隙間なく平面に並べたので, これを真似して八角形を隙間なく「平面のようなもの」に並べると次の図 14 のような感じになります. 尚, 図 14 は cynderella というソフトウェアを使って作成したものを修正したものです.

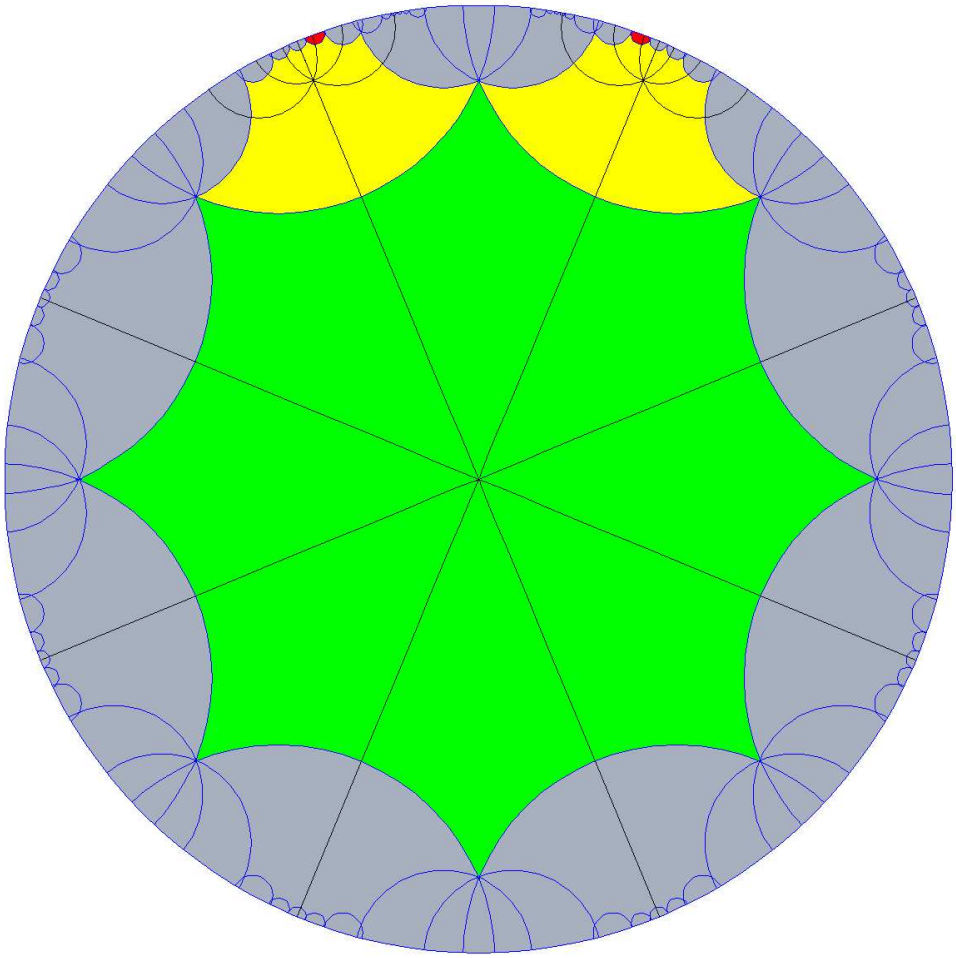

fig.14 八角形を並べる

八角形を一つ選び, その中心を p とします. また, 他の八角形の中心はトーラスのときと同様に p のコピーたちです. すると, この場合にもトーラスと同様に, 基本群の元は p と, p あるいは p のコピーを結ぶ曲線と過不足なく対応します. しかし, 今度はトーラスの場合とは異なり, 「右に行って上に行く」ことと「上に行って右に行く」ことはどうも異なるようです. 実はこれは本当に異なります. すると, 例えば, 「上に２回分行って, 右に１回分行く」というのには「上上右」「上右上」「右上上」の３通りの方法が考えられますが, これらは上の図から示唆されるように実際に異なります. トーラスの時にはこれらは全て整数の組 $(2,1)$ と同じでしたから, これに比べると基本群の元が大分多いことになります. これは二つの道の間にトーラスにはなかった余計な空間があることが原因であると考えられます.

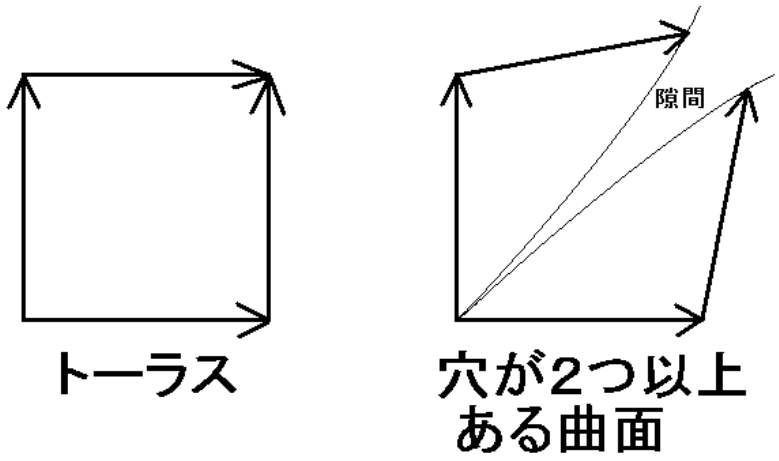

fig.15 間に余計な隙間があるので, 二つの道は合流しない

ここで紙を貼ったときのことを思い出しましょう. 曲率が負のときには, 曲面に紙を貼ろうと思うと紙が足りず, 余分に紙を足さないといけませんでした. 実はこれが今出てきた「余計な隙間」です.

曲率が正の時には今度は上のようないわば「タイル張り」をしようにも, 紙が余っている, つまり曲面が足りないので端のほうでは窄まってしまいます. 実はこのようなときには曲面は球面になってしまい, 結果として閉曲線もつぶれてしまいます.

まとめると, 次のような対応が得られました :

1) 「平ら」 $\Leftrightarrow$ 曲率 $= 0$
2) 紙が余る $\Leftrightarrow$ 曲率 $> 0 \Leftrightarrow$ 基本群の元が少ない
3) 紙が足りない $\Leftrightarrow$ 曲率 $< 0 \Leftrightarrow$ 基本群の元が多い

最後に, 「多様体」の時について一言だけ述べておしまいにします. 曲面は「円盤」あるいは「円盤もどき」を貼り合せて出来たものでした. これを立体化して, 「球体」あるいは「球体もどき」を貼り合せて出来るものが 3 次元多様体です. もっと高次

元のものも考えることが出来ます. このような場合にも, 曲面に対して考えた

1) 曲率 $= 0$
2) 曲率 > 0
3) 曲率 < 0

という大雑把な分類は有効で, 例えば基本群（これも同じように定義します）との関係も似たものになります. 曲面の場合は話が比較的単純だったのですが, 3 次元になると状況は混沌として来ます. 例えば, 曲面の時には「基本群が少ない」ことと, 曲面が球面であることは同じことでした. ところが, 3 次元のときに時には「基本群が少なければ球面であるか?」と問われても俄かには答えられません. 実はこの問の答えが Yes である, というのが Poincaré 予想（あるいは Thurston の幾何学化プログラム（計画））です.