2022 年度幾何学 III 演習問題 1 v1 '22/10/20（木）

・原則として講義の記号を用いる．

・「$*$」がついている問はやや進んだ事柄であったり，専門的な事柄（研究に近い事柄を扱わないとあまり現れない事柄）に関するものである．これらについては解くのは後回しにして構わない．「$*$」の数が多いほどその度合いは高い．一方，数の多さと難易度は必ずしも正の相関にはない．

注 1.1. $f\colon M \to N$ とし，$U \subset M$ を開集合とする．このとき，$X \in \mathfrak{X}(U)$ について N の部分集合上のベクトル場 f_*X が定まるとは限らない．実際，異なる二点 $p, p' \in U$ について $q = f(p) = f(p')$ が成り立つとし，さらに $f_{*p}X(p) \neq f_{*p}X(p')$ とすると，$f_*X(q)$ を自然に定めることは一般にはできない．一方，f_*X が定まる状況も幾つかあり，重要である．

問 1.2. $f\colon M \to M$ を微分同相写像とする．この時，$X \in \mathfrak{X}(M)$ について $f_*X \in \mathfrak{X}(M)$ が

$$f_*X(p) = f_{*p}X(p)$$

により定まることを示せ．

※ f_*X が C^∞ 級であることも示す必要がある．

問 1.3 *. $\pi\colon M \to N$ を被覆空間とし，$g\colon M \to M$ は $\pi \circ g = \pi$ を満たす微分同相写像とする（このような g を**被覆変換**（covering transformation）と呼ぶ）．

1) 被覆変換全体は，M の自己微分同相写像（M から M 自身への微分同相写像）全体のなす群 $\mathrm{Diff}(M)$ の部分群をなすことを示せ．
2) $X \in \mathfrak{X}(M)$ とし，$g_*X = X$ が成り立つとすると，$\pi_*X \in \mathfrak{X}(N)$ が

   $$\pi_*X(q) = X(p),$$

   ただし $p \in \pi^{-1}(q)$，により定まることを示せ．

   ※ π_*X が C^∞ 級であることも示す必要がある．

問 1.4 *. $f\colon M \to N$ とし，$\pi\colon E \to N$ をベクトル束とする．この時，

$$f^*E = \{(p, v) \in M \times E \mid f(p) = \pi(v)\},$$

とし，$f^*\pi\colon E \to M$ を

$$f^*\pi(p, v) = p$$

により定める．f^*Ew を M と E の (f, π) に関する**ファイバー積**と呼ぶ．$(f^*E, f^*\pi)$ は M 上のベクトル束であって，$\operatorname{rank} f^*E = \operatorname{rank} E$ が成り立つことを示せ．また，$\widetilde{f}\colon f^*E \to E$ を

$\widetilde{f}(p,v)=v$ により定めると図式

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{\widetilde{f}} & E \\ {\scriptstyle f^*\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ M & \xrightarrow[f]{} & N \end{array}$$

は可換であることを示せ．

ヒント：$V\subset N$ を開集合とし，$\psi\colon \pi^{-1}(V)\to V\times\mathbb{R}^r$, $r=\operatorname{rank}E$, を局所自明化とする．$U=f^{-1}(V)$ とすると，$\rho\colon (f^*\pi)^{-1}(U)\,(\subset M\times E)\to U\times\mathbb{R}^r$ が $\rho(p,\alpha)=(p,\mathrm{pr}_2\circ\psi(\alpha))$ により定まる．

問 1.5 ***.** $f\colon M\to N$ とする．$X\in\mathfrak{X}(M)$ とすると，$f_*X\in\Gamma_M(f^*TN)$ が

$$f_*X(p)=(p,f_{*p}(X(p)))$$

により定まることを示せ．

※ この観点から言えば，f_*X が一般には定まらないのは $\widetilde{f}\colon f^*TN\to TN$ があまり良くない写像であるから，ということになる．

例 1.6. $\mathbb{C}^2=\mathbb{R}^4$ の部分集合 E を

$$E=\{(z,u)\in\mathbb{C}^2 \mid |z|=1,\ u\in\mathbb{R}\sqrt{z}\}$$

により定め，部分多様体の構造を入れる．ここで，$\mathbb{R}\sqrt{z}$ は $\sqrt{z}$ の取り方によらないので E は well-defined である．E は**メビウスの帯**（Möbuis band）の一つの実現である．さて，$\pi\colon E\to M=S^1=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}$ を

$$\pi(z,u)=z$$

により定める．$z\in S^1$ について $U_z=\{w\in S^1 \mid |\arg(w/z)|<\pi/6\}$ と置く．

$$\pi^{-1}(U_z)=\{(w,v)\in E \mid |\arg(w/z)|<\pi/6,\ v\in\mathbb{R}\sqrt{w}\}$$

である．特に，$E_z=\pi^{-1}(\{z\})=\{(z,u)\in E \mid u\in\mathbb{R}\sqrt{z}\}$ であるから，E_z は $(z,u)+(z,u')=(z,u+u')$, $\lambda(z,u)=(z,\lambda u)$ であるような実線型空間の構造を持つ．また，U_z 上で $\sqrt{\cdot}$ の枝を一つ選び，$\psi_z\colon\pi^{-1}(U_z)\to U_z\times\mathbb{R}$ を

$$\psi_z(w,v)=(w,v/\sqrt{w})$$

により定める．$\pi=\mathrm{pr}_1\circ\psi_z$ が成り立つ．また，$\psi_z|E_z(z,u)=(z,u/\sqrt{z})$ であって，これは線型写像である．$z'\in S^1$ とし，$U_{zz'}=U_z\cap U_{z'}\neq\varnothing$ とする．$U_z,U_{z'}$ の定め方により $U_{zz'}$ は連

結である．さて，U_z, $U_{z'}$ 上で定めた $\sqrt{\cdot}$ の枝をそれぞれ S, S' とする．このとき，$U_{zz'} \times \mathbb{R}$ 上で

$$\psi_z \circ \psi_{z'}^{-1}(w,t) = \psi_z(w, S'(w)t) = (w, S'(w)/S(w) \cdot t)$$

が成り立つ．$S'(w)/S(w) = \pm 1$ であって，特に w に C^∞ 級に依存する．また，$t \mapsto S'(w)/S(w) \cdot t$ は線型写像である．最後に，U_z を定めるときに偏角を $\pi/6$ ではなく，π とする．すると $U_{zz'}$ は連結でなくなり，連結成分ごとに $S'(w)/S(w)$ は異なる値を取る（異なる写像を定める）．

問 1.7. メビウスの帯について，$\psi_z(w,v) = (w, v/\sqrt{w} \cdot \exp(\mathrm{re}\, w))$ とする．ψ_z は U_z 上の局所自明化であることを示せ．また，$\psi_z \circ \psi_{z'}^{-1}$ を求めよ．
※ この自明化は適当に取っただけで，特に意味は無い．

問 1.8. (x,y,z) を $\mathbb{R}^3$ の標準的な座標とし，$\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ を

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$$

により定める．また，(u,v) を $\mathbb{R}^2$ の標準的な座標，$S^1 \subset \mathbb{R}^2$ を単位円周とする．最後に，$\pi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を

$$\pi(x,y,z) = \left(\frac{x+yz}{1+z^2}, \frac{y-xz}{1+z^2} \right)$$

により定める．

1) $(x,y,z) \in \Sigma$ ならば $\pi(x,y,z) \in S^1$ が成り立つことを示せ．
2) $(u,v) \in S^1$ とする．$F_{(u,v)} = \pi^{-1}(u,v)$ と置くと $F_{(u,v)} \subset \Sigma$ が成り立つことを示せ．また，$F_{(u,v)}$ をなるべく簡潔に表せ．
3) π の Σ への制限を π_Σ とする．このとき，微分同相写像 $\varphi \colon \Sigma \to S^1 \times \mathbb{R}$ であって，図式

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{\varphi} & S^1 \times \mathbb{R} \\ {\scriptstyle \pi_\Sigma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ S^1 & = & S^1 \end{array}$$

が可換となるようなものを一つ挙げよ．ここで，$p \colon S^1 \times \mathbb{R} \to S^1$ は第一成分への射影とする．

以下，暫く $K = \mathbb{R}$ または $K = \mathbb{C}$ とする．

例 1.9 (射影空間)**.** $v, w \in K^{n+1} \setminus \{o\}$ について $v \sim w \iff \exists \lambda \in K,\ v = \lambda w$ と定める．$\sim$ は同値関係となるので $KP^n = (K^{n+1} \setminus \{o\})/\sim$ と置いて K 上の n 次元**射影空間**と呼ぶ．$n=1$，$n=2$ の時にはそれぞれ**射影直線**，**射影平面**と呼ぶ．また，$K = \mathbb{R}$ の時には**実射影空**

間（直線，平面），$K=\mathbb{C}$ の時には**複素射影空間**（直線，平面）とも呼ぶ．KP^n は $\mathbb{P}^n_K$ などとも表す．$p \in KP^n$ とすると，$u \in K^{n+1} \setminus \{o\}$ が存在して $p=[u]$，ただし $[u]$ は u の属する同値類，と表すことができる．$l_p = Ku$ とすると，l_p は u の選び方に依らず定まり，$u' \in Ku$ について $p=[u']$ が成り立つ．また，$l_{[u]} = Ku$ が成り立つ．従って KP^n は K^{n+1} の原点を通る直線（1 次元 K-部分線型空間）全体と同一視される．また，$(K^{n+1})^*$ を K^{n+1} の双対空間とし，$H_p = \{\alpha \in (K^{n+1})^* \mid \alpha(u)=0\}$ と置くと，L_p の場合と同様に，KP^n は H_p 全体のなす集合，即ち，$(K^{n+1})^*$ の原点を通る超平面全体と同一視される．計量を考えることにより $(K^{n+1})^*$ を K^{n+1} と同一視すれば，KP^n は K^{n+1} の原点を通る超平面全体と同一視される．

例 1.10 (標準線束)**.** KP^n は K^{n+1} の原点を通る直線全体とみなせることに注意して

$$L = \{(p,v) \in KP^n \times K^{n+1} \mid v \in l_p\}$$

と置き，$\pi\colon L \to KP^n$ を $\pi(p,v)=p$ により定める．L はランク 1 のベクトル束である．$\pi\colon L \to KP^n$ を KP^n 上の**標準線束**（tautological line bundle）などと呼ぶ．L は $L(-1)$ あるいは $L(-1;n)$ などでも表す．

例 1.11 (超平面束)**.** KP^n は $(K^{n+1})^*$ の原点を通る超平面全体と同一視されることに注意して

$$H = \{(p,\alpha) \in KP^n \times (K^{n+1})^* \mid \langle p,\alpha\rangle = 0\}$$

と置き，$\pi\colon H \to KP^n$ を $\pi(p,\alpha)=p$ により定める．ここで，$\langle p,\alpha\rangle$ は $v \in l_p$ について $\langle p,\alpha\rangle = \langle v,\alpha\rangle$ により定める．$\langle p,\alpha\rangle$ は値そのものには意味が無いが，0 であるか否かは well-defined である．$\pi\colon H \to KP^n$ を KP^n 上の**超平面束**（hyperplane bundle）などと呼ぶ．

なお，K は一般の体でもよいが，ここで扱う多様体の範疇からは外れてしまう．

問 1.12 ***.** M を C^∞ 級の多様体とし，$\pi\colon E \to M$ をベクトル束とする．また，M に自然な Lebesgue 測度を入れる．切断として可測なものを許すことにすると，E の大域自明化で，M 上定義されているもの（測度 0 で定義されていないことは許さない）が構成できることを示せ．

このように，切断として何でも良いことにしてしまうと位相的にはベクトル束を考えることにあまり意味がなくなってしまう．一方，微分方程式や力学系のような分野では可測な切断を考えることもしばしばある．

問 1.13. 1) $TS^1 \cong S^1 \times \mathbb{R}$ が成り立つことを示せ．

2) M をメビウスの帯（例 1.6）とする．$TM \not\cong M \times \mathbb{R}^2$ が成り立つ．このことを説明せよ．可能であれば証明せよ．

講義では U が開集合でない場合の $C^\infty(U)$ は何となく定めたが，実際には例えば次のようにする．

定義 1.14. $X \subset M$ とする．このとき，

$$C^\infty(X) = \{f|_X \mid X \text{ を含むある開集合 } U \text{ について } f \in C^\infty(U)\}$$

と定める．

問 1.15. 1) X が開集合ならば $C^\infty(X)$ は講義における定義と一致することを確かめよ．

2) $C^\infty(X)$ は函数の和と積に関して単位可換環であることを示せ．また，零元，単位元 $0, 1$ はそれぞれ定数函数 $0, 1$ であることを確かめよ．

3) $X \subset Y \subset M$ ならば，写像（函数）の制限により環準同型 $C^\infty(Y) \to C^\infty(X)$ が定まることを示せ．また，この準同型について，単射であるが全射では無い例，全射であるが単射では無い例，単射でも全射でも無い例を一つずつ挙げよ．
ヒント：$C^\infty(Y) \to C^\infty(X)$ が単射であることは，$C^\infty(Y)$ の元は X への制限で定まってしまうことを意味する．

$C^\infty(X)$ は函数の X 上での様子だけを気にしているが，X と M の関係をもっと反映させたい場合には，例えば芽（germ）を考える．

定義 1.16. $X \subset M$ とする．このとき，$\mathcal{F}(X) = \displaystyle\bigcup_{\substack{X \subset U \\ U:\text{open}}} C^\infty(U)$ と置く．また，$f, g \in \mathcal{F}(X)$ について，

$$f \sim g \iff X \text{ を含むある開集合 } U \text{ が存在して } f|_U = g|_U \text{ が成り立つ}$$

と定める．そして

$$G(X) = \mathcal{F}(X)/\sim$$

と置く．$G(X)$ の元は，C^∞ 級函数の X における**芽**（germ）と呼ばれる．

なお，$G(X)$ はここでの記号である．

問 1.17 ***.** 1) $G(X)$ は函数の和と積により単位可換環であることを示せ．また，零元，単位元 $0, 1$ はそれぞれ定数函数 $0, 1$ で代表されることを確かめよ．

2) $X \subset Y \subset M$ならば写像の制限により環準同型$G(Y) \to G(X)$が成り立つことを示せ．また，問1.15と同様に単射性，全射性について調べよ．

3) $[f] \in G(X)$について$f|_X \in C^\infty(X)$を与える写像はwell-definedであることを示せ．また，この写像について，単射性，全射性を調べよ．