2018 年度線型代数学演習（理 I 36–39 組向け，足助担当）問題 26 v4
’18/12/20（木）
改変履歴．’18/12/16 :（v0）暫定版作成．概ね 12/20 までの「線型代数学」の講義の内容に対応する予定である．
’18/12/20 :（v1）暫定版その 2 を作成（演習の時間が迫っているので暫定的に公開する．「射影空間」以降について番号が異なるところがあるので注意すること）．
’18/12/20 :（v2）正式版．問 26.4 を追加したのでそれ以降については番号を変更した．二次曲線についてはまだ述べるべきことが残っているので時間があれば追加する．
’18/12/20 :（v3）問 26.1 の誤植を修正．問 26.31 と 26.32 をそれぞれ問 26.1 と 26.7 の後に追加．
’18/12/23 :（v4）問 26.2 以降の番号がおかしくなっていたのを修正．問 26.29 以降に加筆．少し問の番号を変えた．

以下，$K = \mathbb{R}$ あるいは $K = \mathbb{C}$ とする．

問 26.1. $A \in M_n(K)$ とする．$\Phi_A \in K[\lambda]$ を A の固有多項式とし，$\Phi_A(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$，$a_0, \ldots, a_n \in K$，と表す．

1) $a_0 = 1$ が成り立つことを示せ．
2) $a_1 = -\operatorname{tr} A$ が成り立つことを示せ．
3) $a_n = (-1)^n \det A$ が成り立つことを示せ．
4) a_k を A の成分に関する多項式として表すと，k 次式であって，しかも k 次でない項は含まないことを示せ（このような多項式を k 次**同次多項式**と呼ぶ．

※ a_1, a_n 以外の a_k にもきちんと意味が付いて，重要であるが，直接的に目にする機会は数学を専門的に扱わないと少ないかも知れない．

問 26.31. $A \in M_n(\mathbb{C})$ について，$\Phi_A \in \mathbb{C}[\lambda]$ を A の固有多項式とし，

$$\Phi_A = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_n$$

と表す．ここで，$a_1, \ldots, a_n$ は A によって定まるので，$0 \leq k \leq n$ について

$$c_k(A) = a_k$$

と定める．なお，$c_0(A) = 1$ とする．このとき，

$$\forall\, P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),\ \forall\, k,\ c_k(P^{-1}AP) = c_k(A)$$

が成り立つことを示せ．

問 26.2 (三角化). $A \in M_n(\mathbb{C})$ とする．$\lambda_1 \in \mathbb{C}$ を A の固有値とし，$v_1 \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ を λ_1 に属する A の固有ベクトルとする．

1) $\{v_1, w_2, \dots, w_n\}$ を $\{v_1\}$ を拡大して得られる $\mathbb{C}^n$ の基底とする．$P = [v_1\ w_2\ \cdots w_n]$ とすると $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$，$A_2 \in M_{n-1}(\mathbb{C})$ が成り立つことを示せ．
2) λ_2 を A_2 の固有値，$u_2' \in \mathbb{C}^{n-1}$ を λ_2 に属する A_2 の固有ベクトルとする．$u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ u_2' \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$ とすると，ある $\mu_{12} \in \mathbb{C}$ について $P^{-1}APv_2 = \mu_{12}e_1 + \lambda_2 u_2$ が成り立つことを示せ．また，u_2 の第 1 成分を適当に定めることにより，u_2 は e_1 と直交しているように取れることを示せ．
3) $\{e_1.u_2, u_3, \dots, u_n\}$ を $\mathbb{C}^n$ の基底とする．$P_2 = \begin{bmatrix} e_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix}$ と置くと，$P_2^{-1}P^{-1}APP_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mu_{12} & * \\ & \lambda_2 & * \\ & & * \end{bmatrix}$ が成り立つことを示せ．また，$v_2 = Pu_2$ と置けば $PP_2 = [v_1\ v_2\ *]$ が成り立つことを示せ．
4) この作業を繰り返して，A を三角化するような行列が求まることを示せ．また，そのような行列はユニタリ行列であるようにできることを示せ．

   ※ 上では v_2 を見やすくするために 2) で PP_2 を考えたが，実際には $P_3, \dots, P_n$ を同様に構成して一遍に $PP_2 \cdots P_n$ を考えてしまった方が楽である．また，$A \in M_n(\mathbb{R})$ であって，固有値が全て実数であるならば，全て実数の範囲で処理できる．

二次形式と二次曲線

講義では二次形式と二次曲面について主に扱う．二次曲線や二次曲面は二次形式の符号を用いて分類されるが，これだけではそれぞれの曲線や曲面の形や，それらの間の関係を見て取るのが難しいので，ここでは主に二次曲線について幾何的な（図形的な）扱いについても出題する．

二次形式と双線型形式

問 26.3. 以下に挙げる二次形式あるいはエルミート二次形式（エルミート形式とも呼ばれる）の符号（signature）を求めよ．$\mathbb{R}^n$ の座標を $[x_1, \dots, x_n]$，$\mathbb{C}^n$ の座標を $[z_1, \dots, z_n]$ とする．

1) ${x_1}^2 + \cdots + {x_r}^2 - {x_{r+1}}^2 - \cdots - {x_n}^2$.
2) $x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n$.
3) $x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1$.

4) $\displaystyle\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n\\i\neq j}} z_i\overline{z_j}$

5) $x_1x_2+x_3x_4$，ただし $n\geq 4$.

※ エルミート二次形式については以下では扱わない.

問 26.4. $A\in M_n(\mathbb{R})$ を対称行列とし，$\mathbb{R}^n$ 上の二次形式 q を

$$q(v)={}^t vAv$$

により定める．$\operatorname{sgn} A=(p,q)$ が成り立つならば，$P\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ が存在して

$${}^tPAP=E_p\oplus(-E_q)\oplus O_{n-p-q}$$

が成り立つことを示せ.

ヒント：シルベスターの慣性律（Sylvester's law of inertia）を読み返してみよ.

定義 26.5. 1) $F\colon K^n\times K^n\to K$ が K-**双線型写像**あるいは**双線型形式**である[†1]とは,

a)

$$\forall\, w\in K^n,\ v\mapsto F(v,w)\text{ は }K\text{-線型写像である.}$$

b)

$$\forall\, v\in K^n,\ w\mapsto F(v,w)\text{ は }K\text{-線型写像である.}$$

が成り立つことを言う．少し大雑把に言えば，F が成分ごとに K-線型であることを言う.

2) $F\colon K^n\times K^n\to K$ が**対称**（symmetric）であるとは,

$$\forall\, v,w\in K^n,\ F(w,v)=F(v,w)$$

が成り立つことを言う.

3) $F\colon K^n\times K^n\to K$ が K-**反対称**（anti-symmetric）であるとは,

$$\forall\, v,w\in K^n,\ F(w,v)=-F(v,w)$$

が成り立つことを言う（これは以下では用いないが，覚えておくと良い）.

以下では $K=\mathbb{R}$ の場合を扱う．また，双線型写像（双線型形式）を双一次写像（双一次形式）と呼ぶこともある.

定義 26.6. $F\colon\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ を対称双線型形式とする.

[†1] K への線型写像を**線型形式**と呼ぶことがある.

1) F が**非退化**であるとは

$$v \in \mathbb{R}^n,\ \forall w \in \mathbb{R}^n,\ F(v,w) = 0 \Rightarrow v = 0$$

が成り立つことを言う．

2) F が**半正値**であるとは

$$\forall v \in \mathbb{R}^n,\ F(v,v) \geq 0$$

が成り立つことを言う．更に

$$F(v,v) = 0 \Rightarrow v = 0$$

が成り立つとき，F は**正値**であると言う．

3) $-F$ が半正値であるとき，F は**半負値**であるという．また，$-F$ が正値であるとき，F は**負値**であるという．

問 26.7. q を $\mathbb{R}^n$ 上の二次形式とする．$F\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を

$$F(v,w) = \frac{q(v+w) - q(v) - q(w)}{2} \tag{26.8}$$

により定める．

1) F は対称双線型形式であることを示せ．
ヒント：q が $\mathbb{R}^n$ の成分の二次同次式であることを用いないと示せない．
2) $\forall v \in \mathbb{R}^n,\ q(v) = F(v,v)$ が成り立つことを示せ．
3) 対称双線型形式 $F'\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が $\forall v \in \mathbb{R}^n,\ q(v) = F'(v,v)$ を満たすならば $F' = F$ が成り立つことを示せ．
4) 対応 (26.8) により対称双線型形式と二次形式が一対一に対応することを示せ．

問 26.32 ***.** $p \in \mathbb{R},\ p \geq 1$ とし，$q_p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を $v = {}^t[v_1, \ldots, v_n]$ について

$$q_p(v) = (|v_1|^p + \cdots + |v_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

と置くことにより定める．

1) a) $\forall v \in \mathbb{R}^n,\ q_p(v) \geq 0$，
b) $q_p(v) = 0 \Rightarrow v = 0$，
c) $\forall v \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R},\ q_p(\lambda v) = |\lambda|\, q_p(v)$，
d) $\forall v, w \in \mathbb{R}^n,\ q_p(v+w) \leq q_p(v) + q_p(w)$

が成り立つことを示せ．この意味で，q_p は p に依らず q_2，即ち v の標準的なノルムと同様の性質を持つ．

2) $F_p\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を式 (26.8) において q を q_p に置き換えることにより定める．F_p は常に対称であるが，一方，双線型形式であることは $p = 2$ であることと同値であることを示せ．

これ以降はやや難しいが，二次曲線や二次曲面が二次形式の符号により分類される理由を理解するのに必要である．ここでは二次曲線について述べる．二次曲面の場合も考え方は同じであるが，二次形式の符号の場合が増えるのでその分複雑になる．

射影空間

定義 26.9. $\mathbb{R}P^2$ で，$\mathbb{R}^3$ 内の原点を通る直線全体を表す．

$l \in \mathbb{R}P^2$ とする．v を l の方向ベクトルとすれば $v \neq 0$，$l = \mathbb{R}v$ が成り立つし，逆に $v \neq 0$, $l = \mathbb{R}v$ が成り立てば v は l の方向ベクトルである．l の方向ベクトルは一意的ではなく，$\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ を用いて λv と表されるベクトルは全て l の方向ベクトルであるし，逆に w が $\mathbb{R}v$ の方向ベクトルならば，ある $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ について $w = \lambda v$ が成り立つ．

定義 26.10. $v = {}^t[v_1, v_2, v_3] \in \mathbb{R}^3 \setminus \{{}^t[0,0,0]\}$ について，これを方向ベクトルと見なしたものを $v = [v_1 : v_2 : v_3]$ で表す．

問 26.11. $[v_1, v_2, v_3], [w_1, w_2, w_3] \in \mathbb{R}^3 \setminus \{{}^t[0,0,0]\}$ とする．$[v_1 : v_2 : v_3] = [w_1 : w_2 : w_3]$ が成り立つことと，$\exists \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $[w_1, w_2, w_3] = \lambda[v_1, v_2, v_3]$ が成り立つとき，その時のみであることを示せ．

従って $\mathbb{R}P^2 = \{[v_1 : v_2 : v_3] \mid {}^t[v_1, v_2, v_3] \in \mathbb{R}^3 \setminus \{{}^t[0,0,0]\}\}$ が成り立つ．

問 26.12. $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ を

$$S^2 = \{{}^t[v_1, v_2, v_3] \in \mathbb{R}^3 \mid {v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2 = 1\}$$

により定める（S^2 は**2 次元球面**と呼ばれる）．また，$\pi\colon S^2 \to \mathbb{R}P^2$ を

$$\pi({}^t[v_1, v_2, v_3]) = [v_1 : v_2 : v_3]$$

により定める．

1) π は全射であることを示せ．

2) $\pi({}^t[v_1, v_2, v_3]) = \pi({}^t[w_1, w_2, w_3])$ が成り立つのは ${}^t[v_1, v_2, v_3] = {}^t[w_1, w_2, w_3]$ あるいは ${}^t[v_1, v_2, v_3] = -{}^t[w_1, w_2, w_3]$ が成り立つとき，その時のみであることを示せ．

問 26.13. $H \subset \mathbb{R}P^2$ を

$$H = \{[v_1 : v_2 : v_3] \in \mathbb{R}P^2 \mid v_3 \neq 0\}$$

により定める．また，$\iota\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}P^2$ を

$$\iota({}^t[x_1, x_2]) = [x_1 : x_2 : 1]$$

により定める．

1) $\forall {}^t[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2,\ \iota({}^t[x_1, x_2]) \in H$ が成り立つことを示せ．
2) $\iota\colon \mathbb{R}^2 \to H$ は全単射であることを示せ．
3) $S^2_+ \subset \mathbb{R}^3$ を

$$S^2_+ = \{{}^t[v_1, v_2, v_3] \in S^2 \mid v_3 > 0\}$$

により定める（直感的には S^2_+ は北半球である）．また，$\pi\colon S^2 \to \mathbb{R}P^2$ を問 26.12 のように定める．このとき，$\pi(S^2_+) \subset H$ であって，$\pi|_{S^2_+}\colon S^2+ \to H$ は全単射であることを示せ．
4) $\varphi\colon H \to S^2_+$ を $\varphi = (\pi|_{S^2+})^{-1} \circ \iota$ により定める．$\varphi,\ \varphi^{-1}$ を具体的に式で表せ．

アフィン変換，射影変換

定義 26.14. $f\colon K^n \to K^n$ であって，$A \in M_n(K),\ b \in K^n$ を用いて

$$f(v) = Av + b$$

と表されるものを K^n の**アフィン写像**と呼ぶ．特に $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ であるとき，f を**アフィン変換**と呼ぶ．f をアフィン写像とするとき，

$$\begin{bmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_{n+1}(K)$$

を f の**表現行列**と呼ぶ．

※ ここで言うアフィン写像をアフィン変換と呼ぶこともあるので注意を要する．その場合にはここで言うアフィン変換は**正則な**アフィン変換と呼ぶ．

問 26.15. $f\colon K^n \to K^n$ をアフィン写像とする．

1) f を $f(v) = Av + b$ と表すとき，A, b は一意的であることを示せ．
2) f が全単射であることと，$A \in \mathrm{GL}_n(K)$ が成り立つ（従って f がアフィン変換である）ことは同値であることを示せ．また，このとき f^{-1} もアフィン変換であることを示せ．
※ このことを踏まえて，ここで言うアフィン変換についてもわざわざ「正則なアフィン変換」と呼ぶことがある．

K^n を $v \in K^n$ と $\begin{bmatrix} v \\ 1 \end{bmatrix}$ を同一視することにより $K^n \subset K^{n+1}$ と見なす．

問 26.16. $K = \mathbb{R}$，$n = 3$ とする．上のように $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ と見なすこととは，$\mathbb{R}^2$ を問 26.13 の H と同一視することと同じことであることを確かめよ．

問 26.17. $f, g \colon K^n \to K^n$ をアフィン写像とする．また，K^n を上のように K^{n+1} の部分集合と見なす．

1) f の表現行列を $\widetilde{A}$ とする．この時，

$$\forall v \in K^n,\ \widetilde{A} \begin{bmatrix} v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(v) \\ 1 \end{bmatrix}$$

が成り立つことを示せ．

2) f が全単射であることと，f の表現行列が正則であることは同値であることを示せ．

3) f, g の表現行列をそれぞれ $\widetilde{A}, \widetilde{B} \in M_{n+1}(K)$ とすると $g \circ f$ の表現行列は $\widetilde{B}\widetilde{A}$ に等しいことを示せ．

以下では $K = \mathbb{R}$，$n = 2$ とするが，実際には一般に成り立つ．

定義 26.18. $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ とする．$f_A \colon \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}P^2$ を以下のように定める．即ち，$p \in \mathbb{R}P^2$ を $p = [v_1 : v_2 : v_3]$，${}^t[v_1, v_2, v_3] \in \mathbb{R}^3$ と表して $A{}^t[v_1, v_2, v_3] = {}^t[w_1, w_2, w_3]$ と表した上で $f_A(p) \in \mathbb{R}P^2$ を

$$f_A(p) = [w_1 : w_2 : w_3]$$

により定める．このように，正則な行列により定まる $\mathbb{R}P^2$ から $\mathbb{R}P^2$ への写像を $\mathbb{R}P^2$ の**射影変換**と呼ぶ．

※ f_A はここでの記号である．

問 26.19. $A, B \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ とし，f_A, f_B を定義 26.18 のように定める．

1) この時，$f_A(p)$ は p を $p = [v_1 : v_2 : v_3]$ と表す表し方に依らず定まることを示せ．

2) $f_B \circ f_A = f_{BA}$ が成り立つことを示せ．

3) $f_A = \mathrm{id}_{\mathbb{R}P^2}$ であることと，$\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0,\ A = \lambda E_3$ が成り立つことは同値であることを示せ．また，$A, B \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ について $f_A = f_B$ が成り立つことは $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0,\ B = \lambda A$ が成り立つことと同値であることを示せ．

4) f を $\mathbb{R}P^2$ の射影変換とすると，$A \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ が存在して $f = f_A$ が成り立つことを示せ．

定義 26.20 *(この後は明示的には用いない). $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ について

$$[A] = \{B \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) \mid \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0,\ B = \lambda A\}$$

と置く.

$$\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R}) = \{[A] \mid A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})\},$$
$$\mathrm{PSL}_3(\mathbb{R}) = \{[A] \mid A \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})\}$$

と定める.

問 26.21 **. $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R}) = \mathrm{PSL}_3(\mathbb{R})$ が成り立つことを示せ. また, $[A], [B] \in \mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ について $[A][B] = [AB]$ と定めることができて（この演算は well-defined であって）, この演算を積として $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ は群であることを示せ.

問 26.22 *.

1) f を $\mathbb{R}P^2$ の射影変換とする. f が $H = \{[v_1 : v_2 : v_3] \in \mathbb{R}P^2 \mid v_3 \neq 0\}$ を保つならば, $f|_H$ はアフィン変換であることを示せ.
2) g を $\mathbb{R}^2$ のアフィン変換とし, $\widetilde{A} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ を表現行列とする. このとき, f を $\widetilde{A}$ により定まる $\mathbb{R}P^2$ の射影変換とすると f は H を保ち. $f|_H = g$ が成り立つことを示せ.

二次曲線の分類

$C \subset \mathbb{R}^2$ を二次曲線とし,

$$C = \{{}^t[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 \mid a_{11}{x_1}^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}{x_2}^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0\}$$

と $a_{ij} \in \mathbb{R}$ を用いて表す. また, $A = [a_{ij}] \in M_3(\mathbb{R})$ と置く.

問 26.23. $x \in \mathbb{R}^2$ について $\widetilde{x} = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$ と置く.

$$C = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid {}^t\widetilde{x}A\widetilde{x} = 0\}$$

が成り立つことを示せ.

これを踏まえて $\mathbb{R}^3$ 上の二次形式 q を

$$q(v) = {}^t vAv$$

により定める.
※ $\mathbb{R}^2$ 内の図形を考えたいが, $\mathbb{R}^3$ 上の二次形式を考える.

問 26.24. $v \in \mathbb{R}^3$ とする. $q(v) = 0$ が成り立つならば $\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ q(\lambda v) = 0$ が成り立つことを示せ.

これを踏まえて $[v] \in \mathbb{R}P^2,\ v \in \mathbb{R}^3$ について

$$q([v]) = q(v)$$

と定める．$q([v])$ の値は一般には意味を持たないが，0 であるか否かは意味を持つ．

定義 26.25 *. $\widehat{C} = \{[v] = [v_1 : v_2 : v_3] \in \mathbb{R}P^2 \mid q([v]) = 0\}$ と定める．

問 26.26. $\widehat{C} \cap H = C$ が成り立つことを示せ．ここで，$H = \{[v_1 : v_2 : v_3] \in \mathbb{R}P^2 \mid v_3 \neq 0\}$ とし，$x = {}^t[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2$ と $[x_1 : x_2 : 1] \in H$ を同一視する．

従って，$C \subset \mathbb{R}^2$ は自然に $\mathbb{R}P^2$ 内の曲線 $\widehat{C}$ と考えることができる．C を二次形式で表すと，第 3 成分を 1 に固定する必要があって，やや不自然である．また，C の分類よりも $\widehat{C}$ の分類の方が大雑把である（C の分類は $\mathbb{R}^2$ の中で行わないといけないが，$\widehat{C}$ の分類は $\mathbb{R}P^2$ の中で行うので，自由度が高い）ので，$\widehat{C}$ の分類の方が容易であると考えられる．そこでまず $\widehat{C}$ について考えてみる．二次形式を用いる分類を考えているので，$\operatorname{sgn} A = (p, q)$ とする．問 26.4 により，$P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ が存在して

$${}^tPAP = E_p \oplus (-E_q) \oplus O_{3-p-q}$$

が成り立つ．必要なら A の代わりに $-A$ を考える（あるいは q の代わりに $-q$ を考える）ことにより，$p \geq q$ として良い．

問 26.27. 以下が成り立つことを示せ．
全般的なヒント：問 26.12 や 26.13 を用いて，$\mathbb{R}P^2$ を S^2 を用いて調べると良い．即ち，$\mathbb{R}P^2$ 内の図形を考察する際には,「裏面」にも常に同じ図形を描くとして S^2 上で対応する図形を考察すれば良い．

1) $\operatorname{sgn} A = (3, 0)$ とする．このとき，$\widehat{C} = \varnothing$ が成り立つ．
   ヒント：q の標準形は ${v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2$ である．
2) $\operatorname{sgn} A = (2, 1)$ とする．このとき，$\widehat{C}$ は円周と「同じ形」をしている（ここでは図形的に観察すれば良い．また，この円周は直線と呼ばれる）．
3) $\operatorname{sgn} A = (2, 0)$ とする．このとき，$\widehat{C}$ は一点から成る．
4) $\operatorname{sgn} A = (1, 1)$ とする．このとき，$\widehat{C}$ は一点で交わる二つの円周（2) と同様に，これらの円周はそれぞれ直線と呼ばれる）から成る．
5) $\operatorname{sgn} A = (1, 0)$ とする．このとき，$\widehat{C}$ は一つの円周である．

※ この円周は図形的には一つであるが，二つの円周が重なっているものと考える．実際，式で表すならば，A を標準形に変換した場合には $\widehat{C} = \{[v_1 : v_2 : v_3] \in \mathbb{R}P^2 \mid {v_1}^2 = 0\}$ と表される．$\widehat{C}$ は図形としては $\{[v_1 : v_2 : v_3] \in \mathbb{R}P^2 \mid v_1 = 0\}$ と同一であるが，条件が ${v_1}^2 = 0$ となることを踏まえると，この円周は二つの円周が重なっているものと考えるのが自然である．また，図形的に言えば，場合 4) においては q の標準形は ${v_1}^2 - {v_2}^2$ であって，$\widehat{C}$ は $\{v_1 = v_2\}$ 及び $\{v_1 = -v_2\}$ により与えられる．ここで，$\{v_1 = -v_2\}$ を回転して $\{v_1 = v_2\}$ に近づけていく．そのためには二次形式 ${v_1}^2 - {v_2}^2 = (v_1 - v_2)(v_1 + v_2)$ を $(v_1 - v_2)(v_1 + \lambda v_2)$ に置き換えて，λ を 1 から -1 に変化させればよい．得られる式は $(v_1 - v_2)^2$ である．この意味でも $\widehat{C}$ は二つの円周が重なったものと自然に考えることができる．

6) $\operatorname{sgn} A = (0, 0)$ とする．この時には $q = 0$ なので $\widehat{C} = \mathbb{R}P^2$ が成り立つ．

問 26.27 で与えられる分類はよく知っている二次曲線の分類，例えば楕円，放物線，双曲線などへの分類と全く異なるように見えるが，そうではない．

問 26.28. $a, b, r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ とする．C_1, C_2, C_3 をそれぞれ

$$C_1 = \{{}^t[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 \mid (ax_1)^2 + (bx_2)^2 = r^2\},$$
$$C_2 = \{{}^t[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 \mid (ax_1)^2 - (bx_2)^2 = r\},$$
$$C_3 = \{{}^t[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 \mid (ax_1)^2 + 2bx_2 = r\}$$

により定める．C_1, C_2, C_3 に対応する $\mathbb{R}^3$ 上の二次形式の符号はいずれも $(2, 1)$ であることを示せ．

このように，$\widehat{C}$ の分類は二次曲線の大まかな分類になっていることが期待される．ここで，元に戻って C を定める式の二次の部分に着目する．

問 26.29. $\operatorname{sgn} q = (2, 1)$ とする．また，C を定める式の二次の部分に着目して $q'(x_1, x_2) = a_{11}{x_1}^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}{x_2}^2$ と置く．

1) $\operatorname{sgn} q'$ は $(1, 0)$，$(1, 1)$，$(2, 0)$ のいずれかに等しいことを示せ．
2) 1) のそれぞれの場合に応じて C は放物線，双曲線，楕円のいずれかに等しいことを示せ．

それでは $\operatorname{sgn} q'$ はどのような変換により不変であるか，自然な十分条件を考えてみる．$\mathbb{R}^2$ の線型変換では $\operatorname{sgn} q'$ は不変である（シルベスターの慣性律）．また，x_1 や x_2 を $x_1 + a_1$ や $x_2 + a_2$

に置き換えたとする．つまり，$q'(x_1+a_1, x_2+a_2)$ を考えても，二次の項は $q'(x_1, x_2)$ に等しい．従って $\operatorname{sgn} q'$ は $\mathbb{R}^2$ のアフィン変換で不変である．そこで，$q(x_1, x_2, x_3) = [x_1, x_2, x_3]A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$，$A = [a_{ij}]$ は対称行列，で与えられる $\mathbb{R}^3$ 上の二次形式 q により，

$$C = \{{}^t[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 \mid q(x_1, x_2, 1) = 0\}$$

で与えられる二次曲線は次のように分類される．即ち，

1) まず $\operatorname{sgn} q$ によって分類する．これは q が定める $\mathbb{R}P^2$ 上の図形（これは C を含む図形である）の射影変換による分類である．
2) 次に $\operatorname{sgn} q'$ によって分類する．ここで，q' は $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ により定まる $\mathbb{R}^2$ 上の二次形式である．この分類は C の，$\mathbb{R}^2$ のアフィン変換による分類である．

$\operatorname{sgn} q = (2, 1)$ の場合が C の代表的な場合であるが，このほかにも幾つか場合が残っている．これらについても上のように調べ上げることにより，二次曲線の分類が完成する．これについてはここでは省略する．

問 26.30. $r \geq 0,\ \theta \in \mathbb{R}$ とし，$C_{r,\theta}$ を

$$C_{r,\theta} = \{{}^t[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 \cos\theta + \sin\theta)^2 + {x_2}^2 = r^2(x_1 \cos\theta - \sin\theta)^2\}$$

により定める．$C_{r,\theta}$ がどのような図形であるか調べよ．

ところで，$\mathbb{R}^2$ 上の図形の分類において,「形」が変わらないと便利である．ここで「形」が変わらないとは，ある直線を軸とする回転，ある平面に関する折り返し（鏡映），平行移動を用いて同一とみなせることとする．原点を通る直線に関する回転や，原点を通る平面に関する鏡映は O_2 の元により定まる線型変換である．これと平行移動を適当に（適切に）合成すれば任意の直線を軸とする回転や，任意の平面に関する鏡映が得られる．即ち，ここで考えている変換はアフィン変換

$$x \mapsto Ax + b$$

であって，$A \in \mathrm{O}_2$ の場合である．

定義 26.31. $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ を $\mathbb{R}^n$ の標準的なユークリッド計量とし，$x, y \in \mathbb{R}^2$ について $d(x, y) = \|x - y\|$ と置く（d を $\mathbb{R}^n$ 上の標準的な**距離**あるいは**距離函数**と呼び，$d(x, y)$ を d に関する x と y の距離と呼ぶ）．$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ とする．

1) f が $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ を保つとは，

$$\forall\, v, w \in \mathbb{R}^n,\ \langle f(v) \mid f(w)\rangle = \langle v \mid w\rangle$$

が成り立つことを言う．また，f を $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ に関する**等長変換**と呼ぶ．

2) f が d を保つとは，

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n,\ d(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

が成り立つことを言う．また，f を d に関する**等長変換**と呼ぶ．

f をいずれかの意味での等長変換とする．f が線型変換の場合には f を**直交変換**（まれに等長線型変換），f がアフィン変換の場合には**アフィン等長変換**とも呼ぶ．

以下では $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ を $\mathbb{R}^n$ の標準的なユークリッド計量，d を標準的な $\mathbb{R}^n$ 上の距離とする．

問 26.32. 1) $\langle\cdot\mid\cdot\rangle\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は連続であることを示せ．また，C^∞ 級であることを示し，$x = t[x_1, \dots, x_n]$, $y = {}^t[y_1, \dots, y_n]$ について $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\langle x \mid y\rangle$ 及び $\dfrac{\partial}{\partial y_i}\langle x \mid y\rangle$ を求めよ．

2) $d\colon \mathbb{R}^n{\times}\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は連続であることを示せ．また，$\Delta = \{(x, x) \in \mathbb{R}^n{\times}\mathbb{R}^n \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ とすると，d は $(\mathbb{R}^n{\times}\mathbb{R}^n)\backslash\Delta$ 上 C^∞ 級であることを示し，$x = t[x_1, \dots, x_n]$, $y = {}^t[y_1, \dots, y_n]$, $(x, y) \notin \Delta$ について $\dfrac{\partial}{\partial x_i}d(x, y)$ 及び $\dfrac{\partial}{\partial y_i}d(x, y)$ を求めよ．

問 26.33. $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を線型変換とする．

1) f が $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ を保つことと，f の表現行列が O_n に属する，即ち直交行列であることは同値であることを示せ．

2) f が d を保つことと，f が $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ を保つことは同値であることを示せ．
ヒント：問 26.32 を用いても良いし，もっと直接的に示すこともできる．

問 26.34. 1) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ とする．f が $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ を保つことと，f が線型変換であって，表現行列が O_n に属する，即ち直交行列であることは同値であることを示せ．

2) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ をアフィン変換とする．f が d を保つことと，f が $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ を保つことは同値であることを示せ．また，このとき f は（アフィン）等長変換であることを示せ．

このように，アフィン等長変換のみを考えて二次形式の変化を考えることも便利である．この場合にもシルヴェスターの慣性律の類似が成り立つ[†2]．一方，これは射影変換を用いた

[†2] 講義で扱ったと思う．

二次曲線や二次曲面の大雑把な分類においては意味をなさない（折角アフィン等長変換を用いて分類したのに，結局射影変換を用いて分類してしまうので，効果が無くなってしまう）．

※ 二次曲線や二次曲面の分類と射影空間の関係については拙書がとりあえず簡単だと思う（あらゆる意味で，購入を勧めるものでも勧めないものでもない．また，もっと良い文献が存在しないと主張するものではない．念のため）．

（以上）