2018 年度微分積分学演習（理 I 36–39 組向け，足助担当）問題 25 v2
'18/12/13（木）
改変履歴．'18/12/9：（v1）初版作成．概ね 12/10 の講義までの内容である．
'18/12/10：（v2）問 23.28 以降を追加．

級数の絶対収束について

問 25.1. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を複素数列とし，$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を有限個の項を取り替えて得られる複素数列とする．このとき，$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ が絶対収束することと，$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ が絶対収束することは同値であることを示せ．

問 25.2. （講義の）定理 6.1.16 は正項級数について示せばその外の場合はそこから従うことを示せ．

条件収束する級数に関する Dirichlet の定理 **

ここでは次の定理を示すことを目標とする．

定理 (Dirichlet の定理)**.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ は条件収束し，絶対収束しないとする．このとき，任意の $s\in\mathbb{R}$ あるいは $s=\pm\infty$ について，適当に (a_n) の順序を入れ替えて (b_n) とすることにより $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = s$ とすることができる．

問 25.3 **. ディリクレの定理を以下に従って示せ．(a_n) のうち，正の項を順番に並べたものを $p_0, p_1, \ldots$，非正の項を順番に並べたものを $q_0, q_1, \ldots$ とする．

1) p_i や q_j は無限個存在して $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = +\infty$，$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q_n = -\infty$ が成り立つことを示せ．

まず $s\in\mathbb{R}$ とする．(b_n) を次のように定める．まず，$\displaystyle\sum_{n=0}^{k_0-1} p_n > s$ が成り立つような最小の $k_0\in\mathbb{N}$ について，$b_0=p_0, \ldots, b_{k_0-1}=p_{k_0-1}$ とする．

2) このような k_0 が存在することを示せ．

次に $\displaystyle\sum_{n=0}^{k_0-1} p_n + \sum_{n=0}^{l_0-1} q_n < s$ が成り立つような最小の l_0 について $b_{k_0}=q_0, \ldots, b_{k_0+l_0-1}=q_{l_0-1}$ とする．

3) このような k_0 が存在することを示せ．

以下これを繰り返す．さて，$\epsilon > 0$ とする．$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ は収束するので，$N \in \mathbb{N}$ が存在して $n \geq N$ ならば $|a_n| < \epsilon$ が成り立つ．このとき，$M \in \mathbb{N}$ が存在して，(b_m) の添字 m について，$m \geq M$ ならば，対応する a_n の添字 n について $n \geq N$ が成り立つ．

4) このような M が存在することを示せ．
5) $m \geq M$ ならば $\left|\sum_{n=0}^{m} b_n - s\right| < \epsilon$ が成り立つことを示せ．また，$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = s$ が成り立つことを示せ．

次に $s = +\infty$ とする．(b_n) を次のように定める．まず，$\sum_{n=0}^{k_0-1} p_n > 1$ が成り立つような最小の $k_0 \in \mathbb{N}$ について，$b_0 = p_0, \ldots, b_{k_0-1} = p_{k_0-1}$ とする．

6) このような k_0 が存在することを示せ．

次に，$b_{k_0} = q_0$ とし，$\sum_{n=0}^{k_0-1} p_n + q_0 + \sum_{n=k_0}^{k_1-1} p_n > 2$ が成り立つような最小の k_1 について $b_{k_0+1} = p_{k_0}, \ldots, b_{k_0+k_1} = p_{k_0+k_1-1}$ とする．

7) このような k_1 が存在することを示せ．

以下これを繰り返す．さて，$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ は収束するので，$N \in \mathbb{N}$ が存在して $n \geq N$ ならば $|a_n| < 1$ が成り立つ．ここで $L > 0$ とする．このとき，$M \in \mathbb{N}$ が存在して，(b_m) の添字 m について，$m \geq M$ ならば，b_m のうち p_n から定まっている項については $n \geq k_M$ が，q_n から定まっている項については $n \geq N$ が成り立つ．

8) $m \geq M$ ならば $\sum_{n=0}^{m} b_n > M - 1$ が成り立つのことを示せ．また，$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = +\infty$ が成り立つことを示せ．
9) $s = -\infty$ の場合に定理を示せ．

テーラー展開とその収束半径

問 25.4. 次に挙げる函数の，与えられた点を中心とするテーラー展開を求めよ．また，一変数函数については求めたテーラー展開の収束半径を求めよ．

1) $f(x) = \sin x^2$ とし，中心は 0 とする．
2) $f(x) = \sin x$ とし，中心は $\frac{\pi}{2}$ とする．
3) $f(x) = x - x^2$ とし，中心は 1 とする．

4) $f(x) = \log(1 + x^2 + x^3)$ とし，中心は 0 とする．

5) $f(x, y) = \sin(x + y)$ とし，中心は $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とする．

6) $f(x, y) = e^x \cos y$ とし，中心は $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とする．

7) $f(x, y) = e^{x+x^2}$ とし，中心は 0 とする．

8) $f(x, y) = \dfrac{1}{1 + x}$ とし，中心は 0 とする．

9) $f(x, y) = \dfrac{1}{1 + x}$ とし，中心は 1 とする．

10) $f(x) = \tan^{-1} x$ とする．ただし，$f(0) = 0$ であるとする．また，中心は 0 とする．

問 25.5. ここではテーラー展開の中心は 0 とする．また，$\cos x$ のテーラー展開を $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ とする．

1) a_n を求めよ．

2) $k \in \mathbb{N}^+$ とする．$\cos x^k$ のテーラー展開は $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{kn}$ であることを示せ．

3) $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)^2$ を計算し，$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ の形に表せ．また，$\cos^2 x$ のテーラー展開を定義に戻って直接求め，$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ と比較せよ．

4) $\cos^2 x = \dfrac{\cos 2x + 1}{2}$ であることを用いて $\cos^2 x$ を，$\cos x$ のテーラー展開を用いて級数として表し，直接求めたテーラー展開と比較せよ．

問 25.6. $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$, $\coth = \dfrac{1}{\tanh x}$ と定め，それぞれ**双曲余弦函数**，**双曲正弦函数**，**双曲正接函数**，**双曲余接函数**と呼ぶ．また，これらを総称して**双曲線函数**と呼ぶ．

1) それぞれについて，0 を中心とするテーラー展開とその収束半径を求めよ．

2) それぞれについて，三角函数の加法公式の類似が成り立つ．これらを定式化し（主張（今の場合にはどのような式がなりたつのか）を具体的に表し），証明せよ．

問 25.7. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は原点において微分可能であるとする．$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x}, & x \neq 0, \\ Df(0), & x = 0 \end{cases}$$

により定める．

1) g は連続であることを示せ．
2) $f(0)=0$ とすると，ある連続な函数 $h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が存在して $f(x)=xh(x)$ が $\mathbb{R}$ 上成り立つことを示せ．
3) f は $(-\epsilon,\epsilon)\subset\mathbb{R}$ 上解析的だとする．g は $(-\epsilon,\epsilon)\subset\mathbb{R}$ 上解析的であることを示せ．
4) f は $(-\epsilon,\epsilon)\subset\mathbb{R}$ 上 C^∞ 級だとする．g は $(-\epsilon,\epsilon)\subset\mathbb{R}$ 上 C^∞ 級であることを示せ．

※ 3) は 4) のヒントというわけではなく，4) のほうが恐らく難しいのでこの順序にした．

問 25.8. $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は単調増加であるとする．このとき，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ は $+\infty$ に発散するか，あるいはある実数に収束することを示せ．
ヒント：例えば単調増加な数列の収束（あるいは発散）の話に帰着することができる．

問 25.9. P を多項式とし，$x\in\mathbb{R}$ について $f(x)=\dfrac{P(x)}{e^x}$ と置く．$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ が成り立つことを示せ．

問 25.10. $x>0$ について $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$ と置く．

1) 各 $n\in\mathbb{N}^+$ について，高々 $(n-1)$ 次の多項式 P_n が存在して $D^n f(x)=\dfrac{P_n(x)}{x^{2n}}e^{-\frac{1}{x}}$ が成り立つことを示せ．
2) 各 $n\in\mathbb{N}$ について（$n=0$ の場合も含むので注意）$\displaystyle\lim_{x\to+0} D^n f(x)=0$ が成り立つことを示せ．
3) $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $g(x)=\begin{cases} f(x), & x>0, \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$ により定める．g は C^∞ 級であることを示せ．
4) g は $(-1,1)$ 上でテーラー展開不可能であることを示せ．

問 25.11. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ を $z=x+\sqrt{-1}y$ と同一視することにより，$\mathbb{R}^2$ を $\mathbb{C}$ とみなす．$f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$ が微分可能である時，形式的に

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\sqrt{-1}\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$
$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\sqrt{-1}\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

と置く．$f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$ は $\dfrac{\partial f}{\partial\bar{z}}(z)=0$ をみたすとし，以下の問に答えよ．

1) ${}^tDf(x,y)Df(x,y)=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)^2+\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)^2\right)E_2$ が成り立つことを示せ．従って $Df(x,y)$ は直交行列の定数倍である．

2) $\langle\cdot|\cdot\rangle$ で $\mathbb{R}^2$ の通常の内積を表す．$v, w \in \mathbb{R}^2$ とし，$D_vf(0), D_wf(0)$ をそれぞれ f の 0 における v 方向，w 方向への微分とする．$v, w \neq 0$ かつ $Df(0)$ は正則であるとすると $\dfrac{\langle D_vf(0) \mid D_wf(0)\rangle}{\|D_vf(0)\|\,\|D_wf(0)\|} = \dfrac{\langle v \mid w\rangle}{\|v\|\,\|w\|}$ が成り立つことを示せ（これは $D_vf(0)$ と $D_wf(0)$ のなす角は v と w のなす角と等しいことを意味する）．

上極限・下極限（再掲）

数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ について，$n \to +\infty$ において a_n が a に収束するとする．これを回りくどく言えば，$n \to +\infty$ において a_n は a 以下であって，かつ a 以上である，とも言えなくはない．このように「$n \to +\infty$ において a_n は a 以下である」といったことを考えることがある．

なお，第 4 回の演習の際にはこれらは「後回しにしておいてよい」として星をつけていたが，今がその「後回し」の時なので今回は星はつけていない．

定義 4.8. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathbb{R}$ の点列とする．

1) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の**上極限**を次のように定め，$\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$ あるいは $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, a_n$ で表す．まず，$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が上に有界でないときには $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ とする．次に，$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が上に有界だとする．$n \in \mathbb{N}$ とし，$s_n = \sup\limits_{m\geq n} a_m$ とする．$s_{n+1} \leq s_n$ が成り立つ．$(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $n \to +\infty$ において $-\infty$ に発散するならば $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ とする．$(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $-\infty$ に発散しなければ，下に有界であるから $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $n \to +\infty$ の時ある値に収束する．この値を $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$ とする．
2) 次にように $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の**下極限**を定め，$\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n$ あるいは $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, a_n$ で表す．$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が下に有界でないときには $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ とする．$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が下に有界ならば，$n \in \mathbb{N}$ について $s_n = \inf\limits_{m\geq n} a_m$ とする．$(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $n \to +\infty$ において $+\infty$ に発散するならば $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ とし，収束するならばその値を $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n$ と定める．

問 4.9. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathbb{R}$ の点列とし，$a = \limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$ は有限の値だとする．このとき，

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N,\ a_n > a - \varepsilon,$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ a_n \geq a + \varepsilon \Rightarrow n \leq N$$

がそれぞれ成り立つことを示せ．

※ 直感的に言えば，$a_n > a - \varepsilon$ なるような n は無限個存在し，一方，$a_n \geq a + \varepsilon$ なるような n は高々有限個しか存在しない[†1]．逆に，$a \in \mathbb{R}$ についてこれらの条件が成り立てば $a = \limsup_{n\to+\infty} a_n$ が成り立つ．

問 4.10. 定義 4.8 において，

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} s_n,$$
$$\liminf_{n\to+\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} s_n$$

がそれぞれ成り立つことを示せ（それぞれが有限の値の場合に示せばよいが，$\pm\infty$ の場合でも適切に定義することで正当化できる）.

問 4.11. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を実数列とする．ある $a \in \mathbb{R}$ について $a = \limsup_{n\to+\infty} a_n = \liminf_{n\to+\infty} a_n$ が成り立つことと，$\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ が成り立つことは同値であることを示せ.

問 4.12. 以下のように数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を定めるとき，$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の $n \to +\infty$ における上極限と下極限を求めよ．これらが一致する場合には，数列がその値に収束することを（問 4.4 を用いずに）直接示せ.

1) $a_0 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$.
2) $a_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$. ただし $n \geq 1$ とする.
3) $a_n = n^{-n}$．ただし $n \geq 1$ とする.

問 4.12 (追加).　4) $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & n \text{ は奇数}, \\ 1, & n \text{ は偶数} \end{cases}$

問 25.12. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を実数列とする.

1) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は連続だとする．$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ ならば $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(a)$ が成り立つことを示せ.
2) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = -x$ とする．$\limsup_{n\to+\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ であるが，$\limsup_{n\to+\infty} f(a_n) = f(a)$ が成り立たないような $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の例を一つ挙げよ.
3) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は連続かつ単調増加（広義単調増加）とする．$\limsup_{n\to+\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ とするとき，$\limsup_{n\to+\infty} f(a_n) = f(a)$ が成り立つことを示せ.

[†1] ここでは 0 を自然数としているので,「高々」は不要であるが，一つもない可能性があることを強調するために残した.

4) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = -x$ とする．$\liminf_{n\to+\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ であるが，$\liminf_{n\to+\infty} f(a_n) = f(a)$ が成り立たないような $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の例を一つ挙げよ．

5) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は連続かつ単調増加（広義単調増加）とする．$\liminf_{n\to+\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ とするとき，$\liminf_{n\to+\infty} f(a_n) = f(a)$ が成り立つことを示せ．
※「単調減少」ではない．3) もそうであるが，f が $\mathbb{R}$ の元の大小関係を変えないことが重要である（不等号が等号付きになるのは，どのみち極限を考えるので構わない）．

6) $a_n > 0$ とする．$\limsup_{n\to+\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ とするとき，$\limsup_{n\to+\infty} \log(a_n) = \log a$ が成り立つことを示せ．また，$\liminf_{n\to+\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ とするとき，$\liminf_{n\to+\infty} \log(a_n) = \log a$ が成り立つことを示せ．

問 25.13. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を以下のように定めるとき，$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$，$\limsup_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$，$\liminf_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ をそれぞれ求めよ．

1) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \dfrac{1}{n!}$.
2) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-1)^n$.
3) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \dfrac{1}{n^s}$，ただし $s > 0$.
4) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = e^n$.

（以上）