2018 年度線型代数学演習（理 I 36–39 組向け，足助担当）問題 24 v3

'18/12/6（木）

改変履歴．'18/11/24 :（v0）暫定版作成．概ね 12/6 までの「線型代数学」の講義の内容に対応する．

'18/12/6 :（v1）正式版作成．

'18/12/6 :（v2）問 24.5，24.6 を修正．

'18/12/20 :（v3）問 24.5 の 3) を修正．

以下，$K = \mathbb{R}$ あるいは $K = \mathbb{C}$ とする．

対角化

問 24.1. $A \in M_n(\mathbb{C})$ とする．A の相異なる固有値の全体を $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ とし，λ_i の重複度を n_i とする．$V_i \subset \mathbb{C}^n$ を λ_i に属する A の固有空間とする．

1) $\dim V_i \geq 1$ が成り立つことを示せ．
2) $\dim V_i \leq n_i$ が成り立つ．このことを以下に従って示せ．
   $v_1, \ldots, v_k \in V_i$ とし，線型独立とする．
   a) $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n$ を，$v_1, \ldots, v_k$ を拡大して得られる $\mathbb{C}^n$ の基底とする．$P = [v_1 \ \cdots \ v_n]$ とすると
   $$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_i E_k & * \\ 0 & A' \end{bmatrix},$$
   ただし $A' \in M_{n-k}(\mathbb{C})$ が成り立つことを示せ．
   b) 上式の両辺の固有多項式を比較することにより，$n_i \geq k$ が成り立つことを示せ．
   c) $\dim V_i \leq n_i$ が成り立つことを示せ．

問 24.2. 1) $A \in M_n(\mathbb{C})$ とする．以下の手順で A が $\mathbb{C}$ 上対角化可能であるかどうか判定し，可能である場合には $P^{-1}AP$ が対角行列であるような $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ が求まることを示せ．

   a) $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ を A の固有多項式の相異なる根全体，n_i を λ_i の重複度とする．
   b) $i,\ 1 \leq i \leq r$ について $v \in \mathbb{C}^n$ に関する方程式
   $$(\lambda_i E_n - A)v = 0$$
   を解く．これの解空間を V_i とし，$\dim V_i = d_i$ とする．ある i について $d_i < n_i$ が成り立てば A は対角化不可能である．
   ヒント：$d_i = n - \mathrm{rank}(\lambda_i E_n - A)$ が成り立つ．

c) 任意の i について $d_i = n_i$ が成り立つとする（$d_i \leq n_i$ は常に成り立つ（問 24.1）ので，これで場合を尽くしている）．$\{v_1^{(i)}, \ldots, v_{n_i}^{(i)}\}$ を V_i の基底とする．$P = [v_1^{(1)}, \ldots, v_{n_1}^{(1)}, \ldots, v_1^{(r)}, \ldots, v_{n_r}^{(r)}]$ とすると，$P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ が成り立つ．また，$P^{-1}AP$ は対角行列であって，$\lambda_1 E_{n_1} \oplus \cdots\cdots \lambda_r E_{n_r}$ が成り立つ．ここで，正方行列 $A_1, \ldots, A_r$ について

$$A_1 \oplus \cdots \oplus A_r = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{bmatrix}$$

と定める．

2) $A \in M_n(\mathbb{R})$ とする．この場合でも 1) と概ね同様の手順で A が $\mathbb{R}$ 上対角化可能であるかどうか判定し，可能である場合には $P^{-1}AP$ が対角行列であるような $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ が求まる．

a') $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ を A の固有多項式の $\mathbb{C}$ の範囲での相異なる根全体，n_i を λ_i の重複度とする．ある i について $\lambda_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ならば A は $\mathbb{R}$ 上対角化不可能である．

そこで $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ とする．

b') $i,\ 1 \leq i \leq r$ について $v \in \mathbb{R}^n$ に関する方程式

$$(\lambda_i E_n - A)v = 0$$

を解く．これの解空間を V_i とし，$\dim V_i = d_i$ とする．ある i について $d_i < n_i$ が成り立てば A は対角化不可能である．

c') 任意の i について $d_i = n_i$ が成り立つとする．$\{v_1^{(i)}, \ldots, v_{n_i}^{(i)}\}$ を V_i の基底とする．$P = [v_1^{(1)}, \ldots, v_{n_1}^{(1)}, \ldots, v_1^{(r)}, \ldots, v_{n_r}^{(r)}]$ とすると $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ が成り立つ．また，$P^{-1}AP$ は対角行列であって，$\lambda_1 E_{n_1} \oplus \cdots\cdots \lambda_r E_{n_r}$ が成り立つ．

問 24.3. $A \in M_n(\mathbb{C})$ とし，A の固有値の重複度はいずれも 1 に等しいとする．

1) A は $\mathbb{C}$ 上対角化可能であることを示せ．
2) 更に $A \in M_n(\mathbb{R})$ とし，A の固有値はいずれも実数とする．このとき，A は $\mathbb{R}$ 上対角化可能であることを示せ．

三角化

ここでは次を示すことを目標とする．

定理． $A \in M_n(K)$ とする．

a) $K=\mathbb{C}$ とする．$P\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ が存在して $B=P^{-1}AP$ とすると B は上三角行列である．

b) $K=\mathbb{R}$ とする．$P\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ が存在して $B=P^{-1}AP$ とすると B は上三角行列である．また，A の固有値が全て実数ならば $P\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ とできる．

このとき，B の対角成分には A の固有値がその重複度の数だけそれぞれ現れる．また，対角成分の順序は P を適当に選ぶことにより自由に決めることができる．

このように，$P\in \mathrm{GL}_n(K)$ を用いて $P^{-1}AP$ を上三角あるいは下三角行列にする操作を**三角化**と呼ぶ．定理により，三角化は $\mathbb{C}$ 上では常に可能である（さらに $P\in \mathrm{SU}_n$ とできる．問 24.8）．また，固有値が全て実数ならば $\mathbb{R}$ 上で常に可能である（さらに $P\in \mathrm{SO}_n$ とできる．問 24.8）．これは対角化とは大きく異なる．

問 24.4 (問 22.8 のヒントでもある). $A\in M_n(\mathbb{R})$ とし，$\lambda\in\mathbb{R}$ を A の固有値とする．このとき，λ に属する A の固有ベクトル v であって，実ベクトル（$\mathbb{R}^n$ の元）であるものが存在することを示せ．

問 24.5. 1) λ を A の固有値，$v\in\mathbb{C}^n$ を λ に属する A の固有ベクトルとする．$K=\mathbb{R}$ であって，$\lambda\in\mathbb{R}$ であるならば $v\in\mathbb{R}^n$ とする．$v_1=v$ とし，$\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ を $\mathbb{C}^n$ の基底とする．ただし，$\lambda\in\mathbb{R}$ である場合には $\{v_1,\ldots,v_n\}$ は $\mathbb{R}^n$ の基底だとする．$P=[v_1\ \cdots\ v_n]$ とすると $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda & *\\ 0 & A'\end{bmatrix}$，$A'\in M_{n-1}(\mathbb{C})$（$\lambda\in\mathbb{R}$ の場合には $A'\in M_{n-1}(\mathbb{R})$），が成り立つことを示せ．

$n\geq 2$ として，$M_{n-1}(K)$ の元については定理が成り立つとする．1) で選んだ A の固有値を λ_1 とする．

2) 重複度を込みにして考えると，A' の固有値全体は A の固有値全体から λ_1 を（一つ）取り除いたものであることを示せ．

3) $P'\in \mathrm{GL}_{n-1}(K)$ を，$B'=P'^{-1}A'P'$ と置くと B' が上三角行列であるようなものとする．$A\in M_n(\mathbb{R})$ であって，A の固有値が全て実数である場合には $P'\in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$ とできることを示せ．また，$Q=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & P'\end{bmatrix}$，$R=PQ$ と置くと $Q,R\in \mathrm{GL}_n(K)$ であって $R^{-1}AR=\begin{bmatrix}\lambda & *\\ 0 & B\end{bmatrix}$ が成り立つことを示せ．

4) 定理の前半（「このとき」より前）が成り立つことを示せ．

問 24.6. $A\in M_n(K)$，$P\in \mathrm{GL}_n(K)$ とし，$B=P^{-1}AP$ と置くと B は上三角行列だとする．A と B の固有多項式を比較することにより，B の対角成分には A の固有値がその重複度の数だけそれぞれ現れることを示せ．

問 24.7. B の対角成分の順序は P を適当に選ぶことにより自由に決めることができることを示せ．
ヒント：A を帰納的に三角化していくとして，固有値の選び方を工夫すれば良い．

問 24.8 ***.** 定理において $P \in \mathrm{SU}_n$ とできることを示せ．また，A の固有値が全て実数ならば $P \in \mathrm{SO}_n$ とできることを示せ．
ヒント：問 24.2 の真似をする．例えば $P' \in \mathrm{SU}_n$ ならば $Q \in \mathrm{SU}_n$ が成り立つ．$R \in \mathrm{SU}_n$ であるようにするためには v_1 の選び方を工夫する必要がある．なお，SU_n や SO_n の定義については問 24.20 などを参照のこと．

正規行列

定義 24.9. $A \in M_n(K)$ が**正規**である，あるいは**正規行列**であるとは

$$A^*A = AA^*$$

が成り立つことを言う．

問 24.10. 直交行列，ユニタリ行列，実対称行列，エルミート行列，実歪対称行列，歪エルミート行列はいずれも正規行列であることを示せ．また，SO_n，SU_n の元も正規行列であることを示せ．

問 24.11. 正規行列は正則とは限らないことを例を挙げて示せ．

問 24.12.

1) A を上三角行列とする．$A^*A = AA^*$ が成り立つならば A は対角行列であることを示せ．
2) $A \in M_n(\mathbb{C})$ はユニタリ行列（より詳しく，SU_n の元）で三角化可能であることを用いて，正規行列はユニタリ行列（より詳しく，SU_n の元）で対角化可能であることを示せ．また，$A \in M_n(\mathbb{R})$ であって，固有値が全て実数ならば A は直交行列（より詳しく，SO_n の元）で対角化可能であることを示せ．
   ヒント：$P \in \mathrm{SU}_n$ とし，$B = P^{-1}AP$ が上三角行列だとする．すると $B^*B = BB^*$ が成り立つ．

問 24.13. 以下の行列について，正規行列であることを示せ．また，ユニタリ行列を用いて対角化せよ．実行列であって，固有値が全て実数である場合には直交行列を用いて対角化せよ．

1) $\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix}a & -b\\ \overline{b} & a\end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbb{C}$ 4) $\begin{bmatrix}2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$

※ 4) は線型代数学演習，齋藤正彦著，東京大学出版会より引用．

※ 解いてみれば分かるように，かなり面倒くさい．

問 24.14. $A \in \mathrm{SO}_3$ とする．また，$\mathbb{R}^3$ には標準的なユークリッド計量を入れ，$\langle\cdot \mid \cdot\rangle$ で表す．

1) A は 1 を固有値に持つことを示せ．
2) A の固有値が全て実数だとする．この時，
 a) 相異なる固有値は 1 のみで，固有値 1 の重複度は 3 である．
 b) 相異なる固有値は 1 と -1 で，固有値 1 の重複度は 1，-1 の重複度は 2 である．
 のいずれか（そしていずれか一方のみ）が成り立つことを示せ．
3) A の固有値に実数でない複素数が含まれるとする．$\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ をそのような固有値とすると，$\overline{\alpha}$ も固有値であって，$\alpha, \overline{\alpha}$ の重複度はいずれも 1 に等しいことを示せ．
4) $v \in \mathbb{R}^3$ を固有値 1 に属する A の固有ベクトルとする．また，$H = (\mathbb{R}v)^\perp = \{w \in \mathbb{R}^3 \mid \langle v \mid w\rangle = 0\}$ とする（H を $\mathbb{R}v$ の直交補空間とする）．H は A により不変である．即ち，
$$\forall\, w \in H,\ Aw \in H$$
 が成り立つことを示せ．最後に，$\|v\| = 1$ とできることを示せ．
5) $\rho\colon H \to H$ を $\rho(w) = Aw$ により定める．H の（順序付き）正規直交基底を適宜選ぶと，その基底に関する ρ の表現行列は $\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ に等しいことを示せ．
 ヒント：・ρ の表現行列は 2×2-行列である．
 ・固有値は $\cos\theta \pm \sqrt{-1}\sin\theta$ に等しく，これは A の固有値でもある．
 ・実際には $w \in H$ を $\|w\| = 1$ なるように選び，$u \in H$ を $u \perp w$，$\|u\| = 1$ なるように選べば良い．
 ・エルミート計量あるいはユークリッド計量が入った線型空間の部分線型空間には制限によりエルミート計量あるいはユークリッド計量が入るのであった．
6) 5) で求めた ρ の表現行列は $\mathbb{C}$ 上対角化可能であって，重複度を込みにして考えると，固有値全体は A の固有値全体から 1 を除いたものであることを示せ．

7) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $\varphi(v) = Av$ により定める．A の固有値全体は $1, \alpha, \overline{\alpha},\ |\alpha| = 1$ と表すことができることを示せ．

8) 4) において $\|v\| = 1$ であるように v を選び，更に，$\{w, u\}$ を 5) のような H の正規直交基底とする．$P = [v\ w\ u]$ とすると，$P \in \mathrm{O}_n$ であって，$P^{-1}AP$ は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ に等しいことを示せ．また，必要なら w と u を入れ替えて $P \in \mathrm{SO}_n$ とできることを示せ．

9) φ は $\mathbb{R}v$ を軸とする，w 軸から u 軸の方向への θ 回転であることを示せ．
※ A は SO_3 の任意の元であったことに注意せよ．SO_3 の任意の元は，ある軸に関する $\mathbb{R}^3$ の回転を表す．一方，SO_2 の任意の元は，原点に関する $\mathbb{R}^2$ の回転を表す（従って軸に当たるものがなく，代わりに中心がある）．SO_n，$n > 3$ についても類似のことが成り立ち，n が偶数の場合には SO_2 の状況を次元を上げて一般化した状況，n が奇数の場合には SO_3 の状況を次元を上げて一般化した状況になる．なお，少し難しめの線型代数の教科書には何らかの記述があると思われる．

行列の微小変化（行列の摂動）と固有値，対角化可能性 *

$A \in M_n(\mathbb{C})$ について $\|A\| = \sqrt{\operatorname{tr} A^*A}$ と定める．

問 24.15. $A \in M_n(\mathbb{C})$ とする．

1) A は上三角行列だとする．このとき，

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists B \in M_n(\mathbb{C}),\ \|A - B\| < \epsilon,\ B \text{ の固有値の重複度はいずれも } 1 \text{ に等しい}$$

が成り立つことを示せ．
ヒント：B は一つ見つかれば良いので，上三角行列と決め打ちしてみる．すると，A や B の固有値は対角成分である．

2) A は一般の行列とする．このときも

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists B \in M_n(\mathbb{C}),\ \|A - B\| < \epsilon,\ B \text{ の固有値の重複度はいずれも } 1 \text{ に等しい}$$

が成り立つことを示せ．
ヒント：例えば 1) に帰着させることができる．

3) A は一般の行列とする．このとき，

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists B \in M_n(\mathbb{C}),\ \|A - B\| < \epsilon,\ B \text{ は } \mathbb{C} \text{ 上対角化可能である}$$

が成り立つことを示せ．また，B の固有値の重複度はいずれも 1 に等しいようにできることを示せ．

※ 即ち，任意の正方行列をいくらでも対角化可能な行列で近似できて，しかもその行列は固有値の重複度がいずれも 1 であるようにできる．

問 24.16. $A \in M_n(\mathbb{C})$ は $\mathbb{C}$ 上対角化可能だとする．

1) A の固有値の重複度はいずれも 1 に等しいとする．この時，

$$\exists \delta > 0,\ B \in M_n(\mathbb{C}),\ \|A - B\| < \delta \Rightarrow B \text{ は } \mathbb{C} \text{ 上対角化可能である}$$

が成り立つことを示せ．

ヒント：実際には B の固有値の重複度はいずれも 1 に等しくなるように $\delta > 0$ を取れる．

2) A のある固有値 λ について，その重複度は 2 以上だとする．この時，

$$\forall \epsilon > 0,\ B \in M_n(\mathbb{C}),\ \|A - B\| < \epsilon,\ B \text{ は } \mathbb{C} \text{ 上対角化不可能である}$$

が成り立つことを示せ．

ヒント：固有値の重複度を m として，$M_m(\mathbb{C})$ の元で，固有値が λ しかない場合について考えてみよ．

注 24.17. $A \in M_n(K)$ がある性質 (P) を持つとする．

$$\exists \delta > 0,\ B \in M_n(K),\ \|A - B\| < \delta \Rightarrow B \text{ は性質 } (P) \text{ を持つ}$$

が成り立つとき，性質 (P) は摂動に関して**安定**であると言うことにする（概ね一般的な用語であるが，そもそも行列の摂動を考えていることははっきりさせないといけない）．例えば (P) を

a) A は正則である．

b) A の固有値の重複度はいずれも 1 である．

などとすれば (P) は安定であるが，$n \geq 2$ とし，(P) を

a') A のランクは $n-1$ である．

b') A は対角化可能である．

などとすれば，(P) は安定ではない．

群 **

この節のみで扱われている事柄は「線型代数学演習」「微分積分学」「微分積分学演習」の範囲には含まれない．しかし，**問 24.20 までは目を通しておくことを強く勧める．**

定義 24.18. 集合 G が群であるとは $m\colon G\times G\to G$ が存在し，次が成り立つことを言う．

1) $\forall g_1,g_2,g_3\in G,\ m(m(g_1,g_2),g_3)=m(g_1,m(g_2,g_3))$ が成り立つ．
2) $e\in G$ が存在して，$\forall g\in G,\ m(e,g)=m(g,e)=g$ が成り立つ（特に G は空ではない）．
3) 2) の e に関して，$\forall g\in G,\ \exists h\in G,\ m(g,h)=m(h,g)=e$ が成り立つ．

$g,h\in G$ について $m(g,h)$ を通常は gh，$g\cdot h$ あるいは $g.h$ などで表し，g と h の**積**と呼ぶ．

問 24.19. 1) 定義 24.18 の 3) における h は一意的であることを示せ．そこでこの h を g^{-1} で表し，g の**逆元**と呼ぶ．

2) 定義 24.18 における e は一意的であることを示せ．この e を G の**単位元**と呼ぶ．

問 24.20. $K=\mathbb{R}$ あるいは $K=\mathbb{C}$ とする．

$$\begin{aligned}
\mathrm{GL}_n(K)&=\{A\in M_n(K)\mid \det A\neq 0\},\\
\mathrm{SL}_n(K)&=\{A\in M_n(K)\mid \det A=1\},\\
\mathrm{U}_n&=\{A\in M_n(\mathbb{C})\mid AA^*=A^*A=E_n\},\\
\mathrm{SU}_n&=\{A\in M_n(\mathbb{C})\mid A\in\mathrm{U}_n,\ \det A=1\},\\
\mathrm{O}_n&=\{A\in M_n(\mathbb{R})\mid A\in\mathrm{O}_n,\ \det A=1\},\\
\mathrm{SO}_n&=\{A\in M_n(\mathbb{R})\mid A\,{}^tA={}^tA\,A=E_n\},\\
X(K)&=\{A\in M_n(K)\mid A\text{ は上三角行列であって，対角成分には }0\text{ が現れない}\},\\
Y(K)&=\{A\in M_n(K)\mid A\text{ は下三角行列であって，対角成分には }0\text{ が現れない}\},\\
X_1(K)&=\{A\in M_n(K)\mid A\text{ は上三角行列であって，対角成分は }1\text{ に等しい}\},\\
Y_1(K)&=\{A\in M_n(K)\mid A\text{ は下三角行列であって，対角成分は }1\text{ に等しい}\}
\end{aligned}$$

と置く（$X(K),Y(K),X_1(K),Y_1(K)$ はここでの記号である．ほかは一般的なものである）．これらはいずれも行列の積を積とする群であることを示せ．また，単位元を求めよ．

問 24.21. 1) $\mathbb{R},\mathbb{Q},\mathbb{Z}$ は加法を積とする群であることを示せ．また，単位元を求めよ．

2) $\mathbb{N}$ は加法に関して群ではないことを示せ．

3) $M_n(K)$ は行列の加法を積とする群であることを示せ．また，単位元を求めよ．

問 24.22. $\mathfrak{S}_n$ を n 次の対称群とする．即ち，$\mathfrak{S}_n$ は $\{1,\ldots,n\}$ を入れ替える操作を表す写像全体のなす集合とする．$\mathfrak{S}_n$ における積を $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ について

$$\sigma \cdot \tau(i) = \sigma \circ \tau(i) = \sigma(\tau(i))$$

により定める（写像の合成を積とする）．このとき，$\mathfrak{S}_n$ は群であることを示せ．また，単位元は恒等置換（恒等写像）であることを示せ．

※ $\sigma \cdot \tau = \tau \circ \sigma$ と定めることもしばしばあって，注意が要る．

問 24.23 *． $G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & A \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_n(K) \,\middle|\, A \in M_{n-1}(K) \right\}$ とする．また，$e = e_1 = {}^t[1\ 0\ \cdots\ 0] \in K^n$ とする．

1) $G = \{g \in \mathrm{GL}_n(K) \mid ge = e\}$ が成り立つことを示せ．
2) $\forall v \in K^n,\ \exists g \in \mathrm{GL}_n(K),\ v = ge$ が成り立つことを示せ．
3) $\pi \colon \mathrm{GL}_n(K) \to K^n$ を $\pi(g) = ge$ により定める．
   a) π は全射であることを示せ．
   b) $g, g' \in \mathrm{GL}_n(K)$ について，$\pi(g) = \pi(g')$ が成り立つことと，$g^{-1}g' \in G$ が成り立つことは同値であることを示せ．
4) $g \in \mathrm{GL}_n(K)$ が代表する $\mathrm{GL}_n(K)/G$ の元を $[g]$ で表す．$\overline{\pi} \colon \mathrm{GL}_n(K)/G \to K^n$ を，$a \in \mathrm{GL}_n(K)/G$ について $a = [g]$ と表して

$$\overline{\pi}(a) = ge$$

   と置くことにより定める．$\overline{\pi}$ は well-defined であることを示せ．
   ヒント：写像が定まるためには，与えられた元に関して一意的に何か元が定まればよい[†1]．ここでは $a \in \mathrm{GL}_n(K)/G$ について K^n の元が定まれば良いが，$\overline{\pi}$ の定義では一箇所不自然なことをしている．
5) $\overline{\pi}$ は全単射であることを示せ．
6) $\forall g, g' \in \mathrm{GL}_n(K),\ g\overline{\pi}(g') = \overline{\pi}(gg')$ が成り立つことを示せ．
   ※ このことを指して $\overline{\pi}$ は $\mathrm{GL}_n(K)$ の K^n への作用（厳密には左作用）に関して**同変**（equivariant）であると言う．

[†1] より厳密には集合とグラフを用いて写像を定義する．少しややこしくなる．ここではここまで考えなくて良い．

問 24.24. $R \subset \mathbb{R}^2$ を何らかの多角形とし，$A \in M_2(\mathbb{R})$ について $AR = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \exists w \in \mathbb{R}^2,\ v = Aw\}$ と置く．また，$G = \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid AR = R\}$ と置く．すると G は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の部分群であることを示せ.

（以上）