2018 年度微分積分学演習（理 I 36–39 組向け，足助担当）問題 21 v4

’18/11/1（木）

改変履歴．’18/10/25 :（v0）暫定版作成．10/22 の講義で演習とした事柄が中心である．

’18/10/30 :（v1）問 21.11 以降を追加．また，やや難しい問題に ** をつけた．概ね 10/29 の講義の分までの内容である．

’18/10/30 :（v2）問 21.17 以降を追加．

’18/10/30 :（v3）冒頭のコメントを修正．

’18/10/31 :（v4）問 21.4 を修正．

積分は非常に応用が多いが，例えば微分と比べると複雑な操作である．扱いも難しいので慣れが必要である．

問 21.1. 1) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x$ により定める．f は $\mathbb{R}$ 上一様連続であることを示せ．

2) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ により定める．f は $\mathbb{R}$ 上一様連続ではないことを示せ．

3) $-\infty < a \leq b < +\infty$ とし，$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ により定める．f は $[a,b]$ 上一様連続であることを示せ．

4) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = \sin x$ により定める．f は $\mathbb{R}$ 上一様連続であることを示せ．

定義 21.2. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続函数とする．ある $T > 0$ について

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ f(t+T) = f(t) \tag{21.3}$$

が成り立つとき，f を**周期函数**と呼ぶ．f は**周期的**であるともいう．また，このような T の下限を T_0 とする．$T_0 > 0$ が成り立つとき T_0 を f の**周期**と呼ぶ．

問 21.4. 定義 21.2 において，f が連続であるという仮定を外してみる．

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

とすると，任意の正の有理数 T について条件 (21.3) が成り立つことを示せ．また，定義 21.2 の真似をして，条件 (21.3) が成り立つような $T > 0$ の下限を考えると，その値は 0 に等しいことを示せ．

問 21.5. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は連続であって，周期的だとする．定義 21.2 において $T_0 = 0$ が成り立つ，即ち，

$$\inf\{T \in \mathbb{R} \mid T > 0,\ \forall\, t \in \mathbb{R},\ f(t+T) = f(t)\} = 0$$

が成り立つとすると f は定数函数であることを示せ．
※ 示し方はいろいろあるが，例えば次の問 21.6 を用いることもできる．

問 21.6. 連続函数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は周期的だとする．このとき，f は（周期が定まる場合であっても，そうでなくとも）$\mathbb{R}$ 上一様連続であることを示せ．

以下は講義の補足である．

問 21.7 ****.** ここでは次を証明する．発表するのであれば一人で（最後の問以外）全て解くか，あるいは何人かで分担して全ての問に解答を与えよ（一人で全部解いても（何と）1 題の扱いである）．

定理 (Darboux)**.** $S = \inf_{\Delta} \overline{s}(f;\Delta), s = \sup_{\Delta} \underline{s}(f;\Delta)$ とする．このとき，$\lim_{\delta(\Delta)\to 0} \underline{s}(f;\Delta) = s$，$\lim_{\delta(\Delta)\to 0} \overline{s}(f;\Delta) = S$ がそれぞれ成り立つ．ここで，最初の等号は

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \delta(\Delta) < \delta \Rightarrow |\underline{s}(f;\Delta) - s| < \epsilon$$

を意味する．二番目も同様である．

まず $\underline{s}(f;\Delta)$ について示す．$P = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ とする．

1) ある i について $a_i = b_i$ が成り立てば，任意の Δ について $\underline{s}(f;\Delta) = \overline{s}(f;\Delta) = 0$ が成り立つことを示せ．また，$s = S = 0$ が成り立つことを示せ．
2) ある i について $a_i = b_i$ が成り立てば，定理の主張が成り立つことを示せ．

以下では $\forall i,\ a_i < b_i$ とする．

3) $\varepsilon > 0$ とする．P のある分割 D が存在して $s - \varepsilon < \underline{s}(f;D) \leq s$ が成り立つことを示せ．

3) が成り立つような $D = (D_i)_{1\leq i\leq n}$ を一つ選び，固定する．$D_i = \{x_0, \ldots, x_k\}$ と表して（$k = k(i)$ は i に依存する），$d_i = \min_{0\leq j\leq k-1} |x_{j+1} - x_j|$ と置き，$\delta = \min_{1\leq i\leq n} d_i$ と置く．ここで P の分割 $\Delta = (\Delta_i)_{i=1,\ldots,n}$ が $\delta(\Delta) < \delta$ をみたすとする．$\Delta_i = \{y_0, \ldots, y_l\}$ とすると，Δ_i は P の一辺 $[a_i, b_i]$ の分割である．

4) 区間 $[y_i, y_{i+1}]$ に含まれる D_i の分点（上の記号で言えば x_i 達）は高々一つであることを示せ．
5) 各 i について Δ'_i を D_i の分点と Δ_i の分点を併せて得られる $[a_i, b_i]$ の分割とし，$\Delta' = (\Delta'_i)$ と置く．Δ' は D, Δ の共通細分であることを示せ．

$\underline{s}(f;\Delta)$ と $\underline{s}(f;\Delta')$ のうち，$I \in \mathcal{I}(\Delta)$ にあたる部分の和を考える．つまり，まず $I \in \mathcal{I}(\Delta)$ とする．$\underline{s}(f;\Delta)$ のうち，I の部分に関する項は，$\inf_{x\in I} f(x) = m_0$ とすると $m_0 v(I)$ である．I が

分割 Δ' において $I = I_1 \cup \cdots \cup I_k$，$I_i \in \mathcal{I}(\Delta')$ と分割されるとする．すると，$\underline{s}(f;\Delta')$ のうち，I の部分に関する項は，$\inf_{x\in I_i} f(x) = m_i$ と置けば $\sum_{1\le i\le k} m_i v(I_i)$ である．

6) これらの差について

$$\sum_{1\le i\le k} m_i v(I_i) - m_0 v(I) \le (M-m)v(I)$$

が成り立つことを示せ．

一方，$I \in \mathcal{I}(\Delta)$ が D の分点とは無関係で，分割 Δ' を考えてもさらには分割されずに $I \in \mathcal{I}(\Delta')$ が成り立つのであれば，$\underline{s}(f;\Delta)$ と $\underline{s}(f;\Delta')$ のうち，$\underline{s}(f;\Delta)$ と $\underline{s}(f;\Delta')$ の I にあたる部分の和は等しい．

7) 上のことを踏まえると，全体としては，$I \in \mathcal{I}(\Delta)$ であって，分割 Δ' を考えると実際に分割されるもの全体についての $v(I)$ の和を $V(\Delta)$ と置けば

$$\underline{s}(f;\Delta') - \underline{s}(f;\Delta) \le (M-m)V(\Delta)$$

が成り立つことを示せ．

さて，$I \in \mathcal{I}(\Delta)$ が実際に分割されるとする．

8) このような I を $I = [z_1, w_1] \times \cdots \times [z_n, w_n]$ と表せば，いずれかの $[z_i, w_i]$ は Δ'_i の分点で，Δ_i の分点でないものを一つだけ含むことを示せ．また，このような $[z_i, w_i]$ を固定して，$I = I_1 \times \cdots \times [z_i, w_i] \times \cdots I_n$ の形をした $I \in \mathcal{I}$ についての $v(I)$ の和を $V_i(\Delta)$ とすると，

$$V_i(\Delta) \le (w_i - z_i)\prod_{j\ne i}(b_j - a_j) \le \delta(\Delta)\prod_{j\ne i}(b_j - a_j)$$

が成り立つことを示せ．

ここで，D_i の分点の数を $r_i + 2$ と置く（端点 a_i, b_i は必ず分点であるが，これらは実際には新たな分割は与えないので除外して数える）．

9)

$$V_i(\Delta) \le r_i \delta(\Delta)\prod_{j\ne i}(b_j - a_j)$$

が成り立つこと，および

$$V(\Delta) \le \sum_{i=1}^{n} V_i(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} r_i \delta(\Delta)\prod_{j\ne i}(b_j - a_j) = \delta(\Delta)\sum_{i=1}^{n} r_i \prod_{j\ne i}(b_j - a_j)$$

が成り立つことを示せ．

10) $c = \sum_{i=1}^{n} r_i \prod_{j \neq i} (b_j - a_j)$ と置けば，これは Δ には無関係な非負の定数であって，

$$\underline{s}(f; \Delta') - \underline{s}(f; \Delta) \leq (M-m)V(\Delta) \leq c(M-m)\delta(\Delta)$$

が成り立つことを示せ．

11) 補題 5.1.12 により $\underline{s}(f; D) \leq \underline{s}(f; \Delta')$ が成り立つことを用いて

$$\begin{aligned} s - \underline{s}(f; \Delta) &= (s - \underline{s}(f; D)) + (\underline{s}(f; D) - \underline{s}(f; \Delta')) + (\underline{s}(f; \Delta') - \underline{s}(f; \Delta)) \\ &< \varepsilon + 0 + c(M-m)d(\Delta) \end{aligned}$$

が成り立つことを示せ．

12) c, M, m は Δ に無関係であることを確かめよ．また，

$$\delta' = \min\left\{\delta, \frac{\varepsilon}{c(M-m)+1}\right\} = \min\left\{d_1, \ldots, d_n, \frac{\varepsilon}{c(M-m)+1}\right\}$$

と置けば，δ' は D により定まり，$\delta(\Delta) < \delta'$ なる分割 Δ について $s - \underline{s}(f; \Delta) < 2\varepsilon$ が成り立つことを示せ．

13) $s - 2\varepsilon < \underline{s}(f; \Delta) \leq s$ が成り立つことを示せ．また，これで定理のうち，$\underline{s}(f; \Delta)$ に関する主張が示せたことを確かめよ．

14) $\overline{s}(f; \Delta)$ についても同様の議論で示せる．このことを確かめよ．
※ これは発表には用いないこと．

<u>以下では P は有界な閉区間の直積とする．</u>

問 21.8 **．ここでは以下を示す．発表するのであれば一人で（最後の問以外）全て解くか，あるいは何人かで分担して全ての問に解答を与えよ（一人で全部解いても 1 題の扱いである）．

定理． $P = \bigcup_{i=1}^{k} P_i$，ただし P_i は閉区間の直積であって内部を共有しない，とする．$f\colon P \to \mathbb{R}$ とし，f の P_i への制限を f_i とする．すると，$f \in \mathscr{R}(P)$ であることと，全ての i について $f_i \in \mathscr{R}(P_i)$ であることは同値である．また，このとき

$$\int_P f(x)dx = \sum_{i=1}^{k} \int_{P_i} f(x)dx \tag{21.9}$$

が成り立つ．

1) P のある分割 Δ について $\mathcal{I}(\Delta) = \{P_1, \ldots, P_n\}$ が成り立つならば $P_1, \ldots, P_k$ は定理の条件をみたすが，一般には $\{P_1, \ldots, P_n\}$ は P の分割からは得られない．このような

例を一つ挙げよ（単に図示するのではなく，P_i を例えば式を用いて正確に定義すること）．

I) まず $f \in \mathscr{R}(P)$ とし，$f_i \in \mathscr{R}(P_i)$ と式 (21.9) が成り立つことを示す．

2) i を固定し，$\Delta(i)$ を P_i の分割とする．このとき，P のある分割 Δ が存在して，$I \in \mathcal{I}(\Delta(i))$ ならば $I \in \mathcal{I}(\Delta)$ が成り立つことを示せ．

3) 必要なら細分を取って $\delta(\Delta) = \delta(\Delta(i))$ としてよいことを示せ．また，このとき

$$\overline{s}(f;\Delta) - \underline{s}(f;\Delta) \geq \overline{s}(f_i;\Delta(i)) - \underline{s}(f_i;\Delta(i)) \geq 0 \tag{21.10}$$

が成り立つことを示せ．

4) $f \in \mathscr{R}(P)$ であることに注意して，$\delta(\Delta) \to 0$ のとき式 (21.10) の左辺は 0 に収束することを示せ．また，$\delta(\Delta(i)) \to 0$ の時，$\overline{s}(f_i;\Delta(i)) - \underline{s}(f_i;\Delta(i))$ は 0 に収束することと，$f_i \in \mathscr{R}(P_i)$ が成り立つことを示せ．

$\Delta(i),\ i = 1,\ldots,k$ を P_i の分割とする．

5) 必要なら細分を取って $\Delta(i)$ たちを合わせたものは P の分割であるとして良いことを示せ．

※ より自然な文章にするならば，例えば「必要なら $\Delta(i)$ たちをそれらの細分に置き換えれば，$\Delta(i)$ たちを合わせたものは P の分割であると仮定して良い」位であるが，あまりこのようには書かない（うまくいいにくいが，慣れると後者の「自然な」文章の方がわかりにくくなる）．

6) $I \in \mathcal{I}(\Delta(i))$ から一点ずつ選び，$c(i)$ とする．$c(i)$ 達を合わせたものを c とすれば，$\displaystyle\sum_{i=1}^{k} s(f_i;\Delta(i),c(i)) = s(f;\Delta,c)$ が成り立つことを示せ．また，Δ に関して $\delta(\Delta) \to 0$ として極限を取ることにより式 (21.9) が成り立つことを示せ．

II) 逆に，任意の i について $f_i \in \mathscr{R}(P_i)$ が成り立つとする．$\epsilon > 0$ とする．

7) f_i が P_i 上可積分であることの定義により，$\delta_i,\ i = 1,\ldots,k$ が存在して，P_i の分割 $\Delta(i)$ が $\delta(\Delta(i)) < \delta_i$ をみたせば任意の代表点 $c(i)$ について

$$\left| \int_{P_i} f_i(x)dx - s(f_i;\Delta(i),c(i)) \right| < \epsilon$$

が成り立つ．このことを確かめよ．

そこで $\delta = \min\{\delta_1,\ldots,\delta_k\}$ とする．さて，Δ を P の分割であって，$\delta(\Delta) < \delta$ なるものとし，また，c を Δ の代表点とする．より詳しく，$I \in \mathcal{I}(\Delta)$ について，I に関する代表点を c_I とする．Δ' を Δ の細分であって，各 P_i を分割しているものとし，Δ'_i を Δ' により与えられる P_i

の分割とする．このとき，Δ' の代表点 c' を，$I' \in \mathcal{I}(\Delta')$ について $I' \subset I$ なる $I \in \Delta$ をひとつ選び（$v(P) \neq 0$ ならば実際には一つしかない），$c'_{I'} = c_I$ とすることにより定める．すると，c' は自然に Δ'_i の代表点を定めるので，これを c'_i とする．

8) δ の定め方により
$$\left|\int_{P_i} f_i(x)dx - s(f_i; \Delta'_i, c'_i)\right| < \epsilon$$
が成り立つことを確かめよ．また，Δ', c' の定め方により
$$s(f; \Delta, c) = s(f; \Delta', c') = \sum_{i=1}^{k} s(f; \Delta'_i, c_i)$$
が成り立つことを示せ．

9)
$$\left|\sum_{i=1}^{k}\int_{P_i} f_i(x)dx - s(f; \Delta, c)\right| \leq \sum_{i=1}^{k}\left|\int_{P_i} f_i(x)dx - s(f; \Delta'_i, c_i)\right| < k\epsilon$$
が成り立つことを示せ．

10) 9) は $f \in \mathscr{R}(P)$ であって，$\displaystyle\int_P f(x)dx = \sum_{i=1}^{k}\int_{P_i} f(x)dx$ が成り立つことを意味することを確かめよ．

問 **21.11** **．$f\colon P \to \mathbb{R}$ を可積分函数とする．$f^+, f^-\colon P \to \mathbb{R}$ を
$$\begin{aligned} f^+(x) &= \max\{f(x), 0\}, \\ f^-(x) &= -\min\{f(x), 0\}(= \max\{-f(x), 0\}) \end{aligned}$$
により定めると，f^+, f^- は共に可積分であって
$$-\int_P f^-(x)dx \leq \int_P f(x)dx \leq \int_P f^+(x)dx \tag{21.12}$$
が成り立つ．また，$f = f^+ - f^-$ および $|f| = f^+ + f^-$ が成り立つ．このことを以下に従って示せ．

$v(P) = 0$ ならば P 上の任意の函数は可積分であって，その積分値は 0 であるから不等式 (21.12) は自明に成り立つ．$v(P) \neq 0$ とする．Δ を P の分割とし，$I \in \mathcal{I}(\Delta)$ とする．すると，I 上で
$$\begin{gathered} 0 \leq \inf_{x\in I} f(x) \leq \sup_{x\in I} f(x), \\ \inf_{x\in I} f(x) \leq 0 \leq \sup_{x\in I} f(x), \\ \inf_{x\in I} f(x) \leq \sup_{x\in I} f(x) \leq 0 \end{gathered}$$

のいずれかが成り立つ．

1) 最初の場合には

$$\sup_{x\in I} f(x) - \inf_{x\in I} f(x) = \sup_{x\in I} f^+(x) - \inf_{x\in I} f^+(x)$$

が，二番目の場合には

$$\sup_{x\in I} f(x) - \inf_{x\in I} f(x) \geq \sup_{x\in I} f(x) = \sup_{x\in I} f^+(x) - \inf_{x\in I} f^+(x)$$

が，最後の場合には

$$\sup_{x\in I} f(x) - \inf_{x\in I} f(x) \geq 0 = \sup_{x\in I} f^+(x) - \inf_{x\in I} f^+(x)$$

が成り立つことを示せ．また，いずれの場合でも

$$\sup_{x\in I} f^+(x) - \inf_{x\in I} f^+(x) \leq \sup_{x\in I} f(x) - \inf_{x\in I} f(x)$$

が成り立つことを示せ．

ヒント：例えば最初の場合には I 上で $f = f^+$ が成り立つ．

2) 二番目の場合には

$$\sup_{x\in I} f(x) = \sup_{x\in I} f^+(x),$$
$$\inf_{x\in I} f^+(x) = 0$$

が成り立つことを示せ．

3)

$$\sup_{x\in P} f^+(x) = \max\left\{\sup_{x\in P} f(x), 0\right\},$$
$$\inf_{x\in P} f^+(x) = \max\left\{\inf_{x\in P} f(x), 0\right\}$$

が成り立つことを示せ．従って f^+ は P 上有界である．

4) f^+ の過剰和・不足和は定義され，$s = \sup_{\Delta} \underline{s}(f^+;\Delta)$，$S = \inf_{\Delta} \overline{s}(f^+;\Delta)$ とおけば

$$0 \leq S - s \leq \overline{s}(f^+;\Delta) - \underline{s}(f^+;\Delta) \leq \overline{s}(f;\Delta) - \underline{s}(f;\Delta)$$

が成り立つことを示せ．

5) $\delta(\Delta) \to 0$ のとき $\overline{s}(f;\Delta) - \underline{s}(f;\Delta)$ は 0 に収束することを示せ．また，f^+ は可積分であることを示せ．

ヒント：ダルブーの定理を用いよ．

6) $f^- = \max\{-f(x), 0\}$ であることを用いて f^- も可積分であることを示せ．

7) $-f^- \le f \le f^+$ であることを示せ．また，不等式 (21.12) が成り立つことを示せ．

8) $f = f^+ - f^-$ および $|f| = f^+ + f^-$ が成り立つことを示せ．

問 21.13. 問 21.11 において f は連続だとする．このとき，不等式 (21.12) におけるそれぞれの不等号について，等号が成り立つための条件を求めよ．

問 21.14. $f, g \in \mathscr{R}(P)$ とする．$\max\{f, g\}, \min\{f, g\}\colon P \to \mathbb{R}$ を

$$\max\{f, g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\},$$
$$\min\{f, g\}(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

により定めると，$\max\{f, g\}, \min\{f, g\}$ は共に可積分であって

$$\begin{aligned}\int_P \min\{f, g\}(x)dx &\le \min\left\{\int_P f(x)dx, \int_P g(x)dx\right\}\\ &\le \max\left\{\int_P f(x)dx, \int_P g(x)dx\right\}\\ &\le \int_P \max\{f, g\}(x)dx\end{aligned}$$

が成り立つ事を示せ．

定理 21.15. f を複素数を係数とする，0 でない多項式とする．また，f の最高次の項の次数を $\deg f$ で表すことにする．

1) （代数学の基本定理）
$a \in \mathbb{C} \setminus \{0\},\ s > 0,\ \gamma_1, \ldots, \gamma_s \in \mathbb{C},\ k_1, \ldots, k_s \in \mathbb{N}^+$（ただし，$\gamma_i$ 達は互いに相異なる）が一意的に存在して $k_1 + \cdots + k_s = \deg f$ かつ

$$f(z) = a(z - \gamma_1)^{k_1} \cdots (z - \gamma_s)^{k_s}$$

が成り立つ．

2) f が実係数であるならば，$a, a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R},\ r, s \in \mathbb{N},\ k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{N}^+,\ \gamma_1, \ldots, \gamma_s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},\ l_1, \ldots, l_s \in \mathbb{N}^+$（ただし，$a_i$ 達，γ_j 達はそれぞれ互いに相異なる）が一意的に存在して，$\gamma_i = \alpha_i + \sqrt{-1}\beta_i,\ \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ とすると $k_1 + \cdots + k_r + 2(l_1 + \cdots + l_s) = \deg f$ かつ

$$\begin{aligned}f(x) &= a(x - a_1)^{k_1} \cdots (x - a_r)^{k_r} (x - \gamma_1)^{l_1} (x - \overline{\gamma_1})^{l_1} \cdots (x - \gamma_s)^{l_s} (x - \overline{\gamma_s})^{l_s}\\ &= a(x - a_1)^{k_1} \cdots (x - a_r)^{k_r} ((x - \alpha_1)^2 + \beta_1^2)^{l_1} \cdots ((x - \alpha_s)^2 + \beta_s^2)^{l_s}\end{aligned}$$

が成り立つ．

3) f, g を 0 ではない実係数の多項式とすると，次が成り立つ．まず 2) のように

$$f(x) = a(x-a_1)^{k_1}\cdots(x-a_r)^{k_r}((x-\alpha_1)^2+\beta_1^2)^{l_1}\cdots((x-\alpha_s)^2+\beta_s^2)^{l_s}$$

と表す．すると，$\deg g - \deg f$ 次の多項式 h（$h=0$ も許し，次数は 0 とみなす．また $\deg g < \deg f$ の時には $h=0$ とする）と $c_{i,j}\in\mathbb{R},\ 1\le i\le r,\ 1\le j<k_i,\ d_{i,j}, e_{i,j}\in\mathbb{R},\ 1\le i\le s,\ 1\le j\le l_s$ が一意的に存在して

$$\frac{g(x)}{f(x)} = h(x) + \sum_{\substack{1\le i\le r\\ 1\le j\le k_i}} \frac{c_{i,j}}{(x-a_i)^j} + \sum_{\substack{1\le i\le s\\ 1\le j<l_s}} \frac{d_{i,j}x+e_{i,j}}{((x-\alpha_i)^2+\beta_i^2)^j}$$

が成り立つ．右辺を $\dfrac{g}{f}$ の**部分分数分解**と呼ぶ．

問 21.16. 1) 代数学の基本定理を用いて定理 21.15 の 2) を示せ．

2) 定理 21.15 の 3) を示せ．

ヒント：部分分数分解ができること自体は容易である．一意性は $x\to+\infty$ あるいは $x\to a_i,\ x\to\gamma_j$ の極限を考えればわかる（後者を考える際には多項式や有理式の変数は複素数と考える）．

問 21.17. 次の不定積分を求めよ．ただし $a,b,c,d\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{N}^+$ とする．

1) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-a)^k}$.

2) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+b^2)^k}$.

3) $\displaystyle\int\frac{xdx}{(x^2+b^2)^k}$.

4) $\displaystyle\int\frac{cx+d}{((x-a)^2+b^2)^k}dx$.

また，定理 21.15 の 3) の状況で $\displaystyle\int\frac{g(x)}{f(x)}dx$ を一般的に表せ．

問 21.18 (全て解析演習（杉浦他著）からの引用)**.** 以下の函数のそれぞれについて原始函数を積分記号を含まない形で表せ．

1) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2px+q}}$，ただし $p, q \in \mathbb{R}$.

2) $\dfrac{\cot x}{\log|\sin x|}$.

3) $e^{ax}\cos bx$，ただし $a, b \in \mathbb{R}$.

4) $\dfrac{x}{x^4-1}$.

5) $\dfrac{2x-5}{(x+3)(x+1)^2}$.

6) $\dfrac{x^7}{x^{12}-1}$.

7) $\dfrac{\sin x}{1+\sin x}$.

8) $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$.

9) $\operatorname{Arctan} x$.

10) $\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\dfrac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}$.

ただし，9) において $\operatorname{Arctan} x$ で $\tan^{-1} 0 = 0$ をみたす $\tan^{-1} x$ の分枝を表す.

問 21.19. $V = \{f\colon [-1,1] \to \mathbb{R} \mid f$ は連続$\}$ とする．V は $\mathbb{R}$-線型空間である（各自で示すこと）．$f, g \in V$ について

$$\langle f \mid g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

と置く．以下の問に答えよ．なお，講義で扱っていない用語は線型空間に関するものである．いずれも初歩的なものなので定義を知らなければ調べること．

1) $\langle \cdot | \cdot \rangle$ は V の内積を定めることを示せ.
2) 正の整数 n について，$P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\sqrt{\dfrac{2n+1}{2}}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ と置く．$\{P_n\}_{n=1,2,\ldots}$ は $\langle \cdot | \cdot \rangle$ に関して正規直交系をなす事を示せ.
3) $\{P_n\}_{n=1,2,\ldots}$ は V の正規直交基底であるか，理由と共に述べよ.

定義 21.20 (曲線とその長さ)．$I = [a, b]$，$f\colon I \to \mathbb{R}^n$ を C^r 級とする.

1) $f\colon I \to \mathbb{R}^n$ を図形的に考えて C^r 級の**曲線**とも呼ぶ．特に $n = 2$ の場合，f を**平面曲線**と呼ぶことがある．f による I の像 $f(I)$ を曲線と呼ぶこともある.
2) $t \in I$ について，$Df(t)$ を t における，あるいは $f(t)$ における f の**速度ベクトル**と呼ぶ.

   ※ f が単射でない場合，$f(t)$ における速度ベクトル，というのはやや曖昧な言い方になってしまう．これは後で定める法線ベクトルについても同様である.
3) $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ を C^1 級の曲線とする.

$$l(f) = \int_a^b \sqrt{Df(t)^2}\, dt = \int_a^b \|Df(t)\|\, dt$$

   と置いて，$l(f)$ を f の**長さ**と呼ぶ．ここで $\|\cdot\|$ は $\mathbb{R}^n$ の標準的なノルムとする.

以下では曲線は常に C^1 級とする.

問 21.21. 以下のように曲線を定める．それぞれの長さを求めよ．

1) $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ を $f(t) = (\cos \pi t, \sin \pi t)$ により定める．
2) $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ を $f(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$ により定める．
3) $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ を $f(t) = (t, \cosh t) = \left(t, \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}\right)$ により定める．
4) $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ を $f(t) = (t, t^2)$ により定める．

   ※ 具体的な値を求めるのが困難であることが実感できればよい．

問 21.22. $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級とする．曲線 $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ を $g(t) = (t, f(t))$ により定める（グラフを考える）．このとき，

$$l(g) = \int_a^b \sqrt{1 + Df(t)^2} dt$$

が成り立つことを示せ．

問 21.23. $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ を曲線とする．

1) $l(f)(t) = \displaystyle\int_a^t \sqrt{Df(t)^2}\, dt$ とすると，$l(f)\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ は単調増加であることを示せ．また，$\forall\, t \in [a,b]$, $Df(t) \neq 0$ が成り立つとする（このような曲線を**正則な曲線**と呼ぶ）と，$l(f)$ は狭義単調増加であることを示せ．
2) $l(f)$ は C^1 級であって，$D(l(f))(t) = \sqrt{Df(t)^2}$ が成り立つことを示せ．

問 21.24. $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ を正則な曲線とする．

1) このとき，$\alpha = l(f)(a)$, $\beta = l(f)(b)$ と置くと，$\alpha = 0$，$\beta > 0$ であって，$l(f)\colon [a,b] \to [0,\beta]$ は C^1 級の逆函数 $\varphi\colon [0,\beta] \to [a,b]$ を持つことを示せ．
2) φ を 1) のように定め，$g = f \circ \varphi$ と定める．$\|Dg(s)\| = 1$ が成り立つことを示せ．g を f の**弧長パラメータ表示**と呼ぶ．

問 21.25. 次の曲線の弧長パラメーター表示を求めよ．

1) $f(t) = (t, \cosh t)$.
2) $f(t) = (t, t^2)$.

   ※ 具体的には求まらないことを確認せよ．

3) $f(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$，ただし $t \in [-1,1]$.

定義 21.26. $\mathbb{R}^2$ にユークリッド内積（計量）を入れる（多くの場合には標準的なユークリッド内積を考える）．$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ を曲線（平面曲線）とする．$Df(t) \neq 0$ の時，$Df(t)$ に直交するベクトルを t における，あるいは $f(t)$ における f の**法線ベクトル**と呼ぶ．$\mathbb{R}^2$ に標

準的なユークリッド内積が入っている場合，$Df(t) = (a, b)$ について，法線ベクトルとして $(-b, a)$ を考えることが多い．

問 21.27. $a > 0$ とし，$f\colon [-a, a] \to \mathbb{R}^2$ を C^r 級，ただし $r \geq 1$，の正則な曲線とする（取り敢えず $r = \infty$ としてよい）．f を列ベクトルを用いて ${}^t(f_1, f_2)$ と表す（従って $Df(t) = {}^t(Df_1(t), Df_2(t))$ が成り立つ）．そして $\nu(t) = {}^t(-Df_2(t), Df_1(t)) = {}^t(\nu_1(t), \nu_2(t))$ と定める．

1) f が C^r 級ならば Df, ν は C^{r-1} 級であることを示せ．
2) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を $g(y) = \displaystyle\int_0^y \nu(t)dt = {}^t\!\left(\int_0^y \nu_1(t)dt, \int_0^y \nu_2(t)dt\right)$ により定め，$F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $F(x, y) = f(x) + g(y)$ により定める．$DF(x, y) = (Df(x)\ Dg(y)) \in M_2(\mathbb{R})$ が成り立ち，また，$DF(0, 0)$ は正則であることを示せ．
3) F を 2) のように定める．$(0, 0)$ を中心とする開円板 D が存在して，$F|_D\colon D \to F(D)$ は C^r 級の微分同相写像であることを示せ．
   ヒント：逆函数定理あるいは陰函数定理を用いよ．

問 21.27 の記号をそのまま用いる．

問 21.28. $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ を $f(t) = (\cos \pi t, \sin \pi t)$ により定める．

1) $\nu\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ を求めよ．
2) F を求め，D をなるべく（包含関係に関して）大きく選べ．

問 21.29 ****.** $a > 0$ とし，$f\colon (-a, a) \to \mathbb{R}^2$ を C^r 級，ただし $r \geq 2$，の正則な曲線とする（取り敢えず $r = \infty$ としてよい）．また，$0 < a' < a$ とする．さて，$f = {}^t(f_1, f_2)$ と表し，$\mu(s, t) = {}^t(-Df_2(s + t), Df_1(s + t))$ と定める．$\mu(s, t) = {}^t(\mu_1(s, t), \mu_2(s, t))$ と表して，$G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を

$$G(x, y) = f(x) + \int_0^y \mu(x, t)dt = f(x) + {}^t\!\left(\int_0^y \mu_1(x, t)dt, \int_0^y \mu_2(x, t)dt\right)$$

により定める．

1) G は C^r 級であることを示せ（良くわからない場合はとりあえず C^1 級であることを示せ）．
2) $x \in (-a, a)$ について $DG(x, 0)$ は正則であることを示せ．

3) $t_0, \dots, t_r \in [-a', a']$, $t_0 = -a' < t_1 < \cdots < t_r = a'$ と $\delta_i > 0$，ただし $\delta_i \leq a - a'$ が存在して

$$I_i = (t_i - \delta_i, t_i + \delta_i),$$
$$R_i = I_i \times (-\delta_i, \delta_i) \subset \mathbb{R}^2$$

と定めると

a) G の R_i への制限は R_i から $G(R_i)$ への C^r 級の微分同相写像である．

b) $f([-a', a']) \subset R_0 \cup \cdots \cup R_r$ が成り立つ．

が成り立つようなものが存在することを示せ．

ヒント:$[-a, a]$ はコンパクト集合[†1]である．コンパクト集合の定義あるいは Heine–Borel の定理について調べてみよ．

4) 3) の記号をそのまま用いる．$\delta > 0$ が存在して，G の $R' = (-a', t_1 + \delta_1) \times (-\delta, \delta) \subset \mathbb{R}^2$ への制限は R' から $G'(R')$ への C^r 級の微分同相であることを示せ．

ヒント：$i = 0, 1$ とする．素朴に考えれば G は R_i から $G(R_i)$ への微分同相であるから，単純に合わせて考えれば良さそうであるが，例えば $x_i \in I_i$ としたとき，$G(x_0, \mathbb{R})$ と $G(x_1, \mathbb{R})$ が交わらないとは限らない（例えば円や放物線を考えてみよ）．実際には第二成分の範囲は $\mathbb{R}$ 全体と比べてかなり小さくてよいことを用いて，このような状況をうまく回避する必要がある．上述のようなまずい状況が起きる場合に，例えば $T \in I_0 \cap I_1$ として $G(T, \mathbb{R})$ と $G(x_0, \mathbb{R})$ と $G(x_1, \mathbb{R})$ の交点の位置関係を観察してみよ．

5) $\epsilon > 0$ が存在して，G の $N_\epsilon = (-a', a') \times (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R}^2$ への制限は N_ϵ から像 $G(N_\epsilon)$ への C^r 級の微分同相であることを示せ．

問 21.30. $a < b$ とし，$f \colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ を C^0 級の曲線とする．$\Delta = \{x_0, \dots, x_k \mid x_0 = a < x_1 < \cdots < x_k\}$ を $[a, b]$ の分割とし（k は分割ごとに定まり，一定ではない），

$$\lambda(f; \Delta) = \sum_{i=1}^{k} \|f(x_i) - f(x_{i-1})\|$$

と定める．

1) Δ' が Δ の細分であるならば $\lambda(f; \Delta') \geq \lambda(f; \Delta)$ が成り立つことを示せ．

ヒント：Δ' は Δ に分点を付け加えて得られる．$I \in \mathcal{I}(\Delta)$ それぞれについて，これが更に分割される場合と，そうでない場合をそれぞれ考えてみよ．

[†1]有界閉集合，としても今の場合同じことであるが，例えば今は一つであるパラメータが無限個存在するような状況では有界閉集合とコンパクト集合は異なる．前者はあまり役に立たないことが少なくない．

2) Δ, Δ' を $[a,b]$ の分割とする．Δ'' を Δ, Δ' の共通細分とする（今の場合，Δ'' を Δ, Δ' の分点を全て合わせて考えた物とすることと同値である）．このとき，$\lambda(f;\Delta'') \geq \max\{\lambda(f;\Delta), \lambda(f;\Delta')\}$ が成り立つことを示せ．

3) $l(f) = \sup_{\Delta} \lambda(f;\Delta)$ と置く．$\delta(\Delta) = \max_{1\leq i\leq k} |x_i - x_{i-1}|$ とすると，

$$l(f) = \lim_{\delta(\Delta)\to 0} \lambda(f;\Delta)$$

が次の意味で成り立つことを示せ．即ち，

a) $l(f) < +\infty$ ならば

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \delta(\Delta) < \delta \Rightarrow |l(f) - \lambda(f;\Delta)| < \epsilon$$

が成り立つ．

b) $l(f) = +\infty$ ならば

$$\forall M > 0,\ \exists \delta > 0,\ \delta(\Delta) < \delta \Rightarrow \lambda(f;\Delta) > M$$

が成り立つ．

4) $l(f) \geq b - a$ が成り立つことを示せ．

5) f が C^1 級ならば，$l(f) = \displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + Df(t)^2}dt$ が成り立つことを示せ．特に $l(f) < +\infty$ が成り立つ．

6) f を C^1 級，$\varphi\colon [a',b'] \to [a,b]$ を C^1 級とする．$[a',b']$ 上 $D\varphi(t) > 0$ が成り立つならば $g = f \circ \varphi$ とすると $l(g) = l(f)$ が成り立つことを示せ．この意味で f で表される曲線の長さはパラメータの取り方によらない．

7^{**}) 6) は f を C^0 級としても成り立つことを示せ．

以降はやや難しい．現時点では，微分可能な曲線とそうでないものの差が大きいことを見て取れれば良い．

問 21.31 *．$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ を以下のように定める．まず $C \subset [0,1]$ を以下のように定める．

a) $k \in \mathbb{N},\ 1 \leq j \leq 2^k$ について，$a_{k,j}$ を

$$(a_{k,1}, a_{k,2}, \ldots, a_{k,2^k}) = (1, 7, 19 = 2\cdot 3^2 + 1, 25 = 2\cdot 3^2 + 7, 55 = 2\cdot 3^3 + 1,$$
$$2\cdot 3^3 + 7, 2\cdot 3^3 + 19, 2\cdot 3^3 + 25, \ldots, 3^{k+1} - 1)$$

により定める．やや複雑であるが，3 進数では

$$1_3, 21_3, 201_3, 221_3, 2001_3, 2021_3, 2201_3, 2221_3, \ldots, \overbrace{2\cdots 2}^{k\text{ 個}}1_3$$

である（右下の「3」は 3 進数表示であることを表す）.

b) $I_{k,j} = \left[\dfrac{a_{k,j}}{3^{k+1}}, \dfrac{a_{k,j}+1}{3^{k+1}}\right]$ と置き，$C = \displaystyle\bigcup_{k,j} I_{k,j}$ と定める.

1) $(k,j) \neq (k',j')$ ならば $I_{k,j} \cap I_{k',j'} = \varnothing$ が成り立つことを示せ.

2) C を図示せよ.

3) $\forall t \in [0,1],\ \exists \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C,\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = t$ が成り立つことを示せ.

c) $k \in \mathbb{N},\ 1 \leq j \leq 2^k$ について $b_{k,j}$ を

$$
\begin{aligned}
(b_{k,1}, b_{k,2}, \ldots, b_{k,2^k}) &= (1_2, 11_2, 101_2, 111_2, \ldots, \overbrace{1\cdots1}^{k\text{ 個}}0_2) \\
&= (1, 3, 5, 7, \ldots, 2^{k+1}-1)
\end{aligned}
$$

により定める.

d) $t \in C$ とする．$t \in I_{k,j}$ なる k, j が一意的に存在するので，$f(t)$ を

$$
f(t) = \frac{b_{k,j}}{2^{k+1}}
$$

により定める.

4) $f\colon C \to \mathbb{R}$ のグラフを図示せよ.

5) $t \in [0,1]$ とする（$t \notin C$ とは仮定していないことに注意せよ）．$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C$ を $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = t$ なるように選ぶと $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(x_n)$ は存在して，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の選び方に依らないことを示せ.

e) そこで，5) により定まる値を $f(t)$ とする.

6) $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ は連続であることを示せ.

7) $l(f) = 2$ が成り立つことを示せ.

8) $\mathring{C} = \displaystyle\bigcup_{k,j} \left(\frac{a_{k,j}}{3^{k+1}}, \frac{a_{k,j}+1}{3^{k+1}}\right)$ と置く．$t \in \mathring{C}$ ならば $Df(t)$ が定まり，0 に等しいことを示せ.

ところで，3) の結果は $[0,1]$ の元で，C に属していない点も「大体」C の点であることを意味する．その意味で C は $[0,1]$ の「ほとんど全部」の部分である．これを踏まえて，$l(f)$ を得るために，大雑把に $\sqrt{1+Df(t)^2}$ を C 上で積分して（「端」では左右の微分を考えることにする）$l(f)$ を得ようとすると，$l(f) = 1$ が成り立つように考えられる．しかし，7) はそれは正しくないことを意味する．つまり，f は $[0,1]$ の「ほとんど全部」で微分が消えているのに，その長さは 1 ではない．C は **Cantor の 3 進集合**，f のグラフは**悪魔の階段（devil's ladder）**と呼ばれる.

問 21.32 *．$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ を次のように定める．$k \in \mathbb{N},\ k \geq 1$ とする．$1 \leq j \leq 2^k$ について $I_{k,j} = \left[\dfrac{j-1}{2^k}, \dfrac{j}{2^k}\right]$ とする．$t \in [0,1]$ について，$t \in I_{k,j}$ とし，

$$g_k(t) = \begin{cases} \left(t - \dfrac{j-1}{2^k}\right), & j \text{ が奇数}, \\ \dfrac{1}{2^k} - \left(t - \dfrac{j-1}{2^k}\right), & j \text{ が偶数} \end{cases}$$

と定める．そして，$f(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} g_n(t)$ と定める．f は**高木函数**と呼ばれる[†2]．また，γ を f のグラフとする．$\gamma(t) = (t, f(t))$ である．

1) f は連続であることを示せ．
2) $[a,b] \subset [0,1],\ a < b$ とする．γ の $[a,b]$ への制限を $\gamma_{a,b}$ とすると $l(\gamma_{a,b}) = +\infty$ が成り立つことを示せ．

   ヒント：$[a,b]$ がある $I_{k,j}$ に等しい場合を示せば十分である．必要であれば問 21.33 と 21.34 を用いてみよ．例えば $[a,b] = [0,1]$ の場合には $l(\gamma) < +\infty$ とすると，ある $\lambda > 1$ について $l(\gamma) = \dfrac{1+\lambda}{2} l(\gamma)$ が成り立つことが示せる．従って $l(\gamma) = 0$ が成り立つが，実際には $l(\gamma) > 0$ が成り立つ．

問 21.33. $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ を C^r 級の曲線とする．また，$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ とし，$\varphi_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $\varphi_A(x) = Ax$ により定める．最後に，$f_A\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ を $f_A = \varphi_A \circ f$ により定める．図形的には f_A は f を φ_A で写して得られる曲線である．

1) $r \geq 1,\ n = 2$ とする．$r \geq 1$ とする．$l(f_A) = \displaystyle\int_a^b \sqrt{{}^tDf(t)\,{}^tA\,ADf(t)}\,dt$ が成り立つことを示せ．
2) $A \in \mathrm{O}_n = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA\,A = A\,{}^tA = E_n\}$ とする[†3]．このとき，$l(f_A) = l(f)$ が成り立つことを示せ．

   ヒント：$r > 0$ ならば 1) から従う．$r = 0$ の時には定義に戻るのがよい．
3) $v \in \mathbb{R}^n$ とし，$\psi_v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $\psi_v(x) = x + v$ により定める．$f_v = \psi_v \circ f$ とすると $l(f_v) = l(f)$ が成り立つことを示せ．
4) $r = 0,\ n = 2$ とし，f は $f(t) = {}^t(t, g(t))$ と表されるとする．
   a) f が連続であることと g が連続であることは同値であることを示せ．また，f が C^1 級であることと g が C^1 級であることは同値であることを示せ．

[†2]「高木」は高木貞治である．

[†3] O_n は n 次の**直交群**，O_n の元は n 次の**直交行列**と呼ばれる．$A \in \mathrm{O}_n$ であることと φ_A は $\mathbb{R}^n$ の標準的なユークリッド計量を保つことは同値である（これらのことについては線型代数学で扱う）．

b) $\lambda > 0$ とし，$f_\lambda \colon [a/\lambda, b/\lambda] \to \mathbb{R}^2$ を $f_\lambda(t) = (t, g(\lambda t))$ により定める．

$$l(f_\lambda) > l(f), \quad \lambda < 1,$$
$$l(f_\lambda) < l(f), \quad \lambda > 1$$

が成り立つことを示せ．

ヒント：まずは f が C^1 級の場合に考えてみよ．f が C^0 級の場合には f の微分は使えないので議論を修正する必要がある．

問 21.34. 問 21.32 の記号をそのまま用いる．$f_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} g_k$ とし，γ_n を f_n のグラフとする．

1) $l(\gamma) = \displaystyle\sup_{n \geq 1} l(\gamma_n)$ が成り立つことを示せ．

2) $n \geq 2$ とし，$1 \leq k \leq 2^{n-2}$ について $t_k = \dfrac{2k-1}{2^n}$ と置く．$f_n(t_k)$ は次のように計算できることを示せ．

   a) $a_1 = 2k - 1$ と置く．$a_1 < 2^{n-1}$ ならば $b_1 = \dfrac{a_1}{2^n}$ とし，$2k - 1 > 2^{n-1}$ ならば $b_1 = \dfrac{2^n - a_1}{2^n}$ とする．いずれの場合にも $a_1 = 2k - 1$ を 2^{n-1} で割った余りを a_2 とする．

   ※ a_1 を 2^{n-1} で割った商が 0 ならば $b_1 = \dfrac{a_2}{2^n}$，1 ならば $b_1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{a_2}{2^n}$ である．

   b) $a_2 < 2^{n-2}$ ならば $b_2 = \dfrac{a_2}{2^n}$ とし，$a_2 > 2^{n-2}$ ならば $b_2 = \dfrac{2^{n-1} - a_2}{2^n}$ とする．いずれの場合にも a_2 を 2^{n-2} で割った余りを a_3 とする．

   ※ a_2 を 2^{n-2} で割った商が 0 ならば $b_2 = \dfrac{a_3}{2^n}$，1 ならば $b_2 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{a_3}{2^n}$ である．

   c) 以下，同様に a_i, b_i を $i = 1, \ldots, n$ について定める．すると $f_n(t_k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_i$ が成り立つ．

   d) $2k - 1$ の二進展開と $f_n(t_k)$ の関係について調べよ．

   ※ ある程度系統的に表せるが，適当なところで妥協して場合分けをしてしまった方が取り敢えず簡単である．

3) $l(\gamma_n)$ を求めよ．また，$l(\gamma_{n+1}) > l(\gamma_n)$ が成り立つことを示せ．

4) $l(\gamma) = +\infty$ が成り立つことを示せ．

（以上）