2018年度幾何学III演習問題8 v1

'18/12/4（火）

改変履歴．'18/12/4 :（v1）初版作成．概ね12/4の講義までの内容である．

ここではde Rhamコホモロジーの具体的な計算について扱う．

問 8.1. $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$と見なし，$\pi\colon \mathbb{R} \to S^1$を射影とする．また，$\tau\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$を$\tau(x) = x + 1$により定め，$p \in \mathbb{Z}$について

$$\Omega^p(\mathbb{R})^{\mathbb{Z}} = \{\omega \in \Omega^p(\mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R} \mid \tau^*\omega = \omega\}$$

と置く．

1) 特に$p = 0$とする．$f \in \Omega^0(\mathbb{R})^{\mathbb{Z}}$であることと，$\forall n \in \mathbb{Z},\ x \in \mathbb{R},\ f(x+n) = f(x)$が成り立つことは同値であることを示せ．
2) $\omega \in \Omega^p(S^1)$とする．$\pi^*\omega \in \Omega^p(\mathbb{R})^{\mathbb{Z}}$が成り立つことを示せ．
3) $\widetilde{\omega} \in \Omega^p(\mathbb{R})^{\mathbb{Z}}$とする．この時，$\pi_*\widetilde{\omega}$を，$p \in S^1$について$p = t \mod \mathbb{Z},\ t \in \mathbb{R}$と表して$(\pi_*\widetilde{\omega})_p = \widetilde{\omega}_t$と定めると，$\pi_*\widetilde{\omega}$はwell-definedであって，$\pi_*\widetilde{\omega} \in \Omega^r(S^1)$が成り立つことを示せ．
4) π^*, π_*はそれぞれC^∞加群としての同型であって，互いに逆写像であることを示せ．また，$\mathbb{R}$上の外微分作用素を$d_{\mathbb{R}}$，S^1上の外微分作用素をd_{S^1}とすると$d_{\mathbb{R}} \circ \pi^* = \pi^* \circ d_{S^1}$，$d_{S^1} \circ \pi_* = \pi_* \circ d_{\mathbb{R}}$がそれぞれ成り立つことを示せ．

問 8.2. $H^r_{\mathrm{dR}}(S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & r = 0, 1, \\ \{0\}, & r \neq 0, 1 \end{cases}$が成り立つことを以下に従って示せ（ほかの方法も後で扱う）．

1) $p \in S^1$を固定する．$\varphi^0\colon H^0_{\mathrm{dR}}(S^1) \cong \mathbb{R}$を，$c \in H^0_{\mathrm{dR}}(S^1)$を$c = [f],\ f \in Z^0(S^1)$と表して$\varphi^0(c) = f(p)$により定めると，$\varphi^0$はwell-definedであって，また，$p$の選び方に依らないことを示せ．また，$\varphi^0$は線型同型写像であることを示せ．
2) $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$と見なし，$\pi\colon \mathbb{R} \to S^1$を射影とする．$\psi\colon \Omega^1(S^1) \to \mathbb{R}$を，$\omega \in \Omega^1(S^1)$について$\psi(\omega) = \displaystyle\int_0^1 \pi^*\omega$と置くことにより定める．
   a) $\gamma\colon [0,1] \to S^1$を$\gamma(t) = t$により定めれば，線積分の定義により$\psi(\omega) = \displaystyle\int_\gamma \omega$が成り立つ．ここで，$S^1$の基点を固定する．$\zeta\colon [0,1] \to S^1$が$\gamma$に$C^\infty$級にホモトピックならば$\psi(\omega) = \displaystyle\int_\zeta \omega$が成り立つことを示せ．

ヒント：ω が閉形式である必要があるが，ここではこれは自動的に成り立つ．

b) ψ は基点の取り方に依らないことを示せ．

c) $\omega = df$ が $f \in \Omega^0(S^1)$ について成り立つならば $\psi(\omega) = 0$ が成り立つことを示せ．

d) $\psi(\omega) = 0$ とする．$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(t) = \displaystyle\int_0^t \omega$ により定めると f は C^∞ 級であって，$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t+1) = f(t)$ が成り立つことを示せ．

e) $\psi(\omega) = 0$ ならば $f \in \Omega^0(S^1)$ が存在して $\omega = df$ が成り立つことを示せ．

3) 最初の主張

$$H^r_{\mathrm{dR}}(S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & r = 0, 1, \\ \{0\}, & r \neq 0, 1 \end{cases}$$

が成り立つことを示せ．

問 8.3. $A = (A^*, d_A),\ B = (B^*, d_B)$ をそれぞれ複体とし，$f\colon A \to B$ をコチェイン写像とする．

1) $a \in Z^r(A)$ とする．このとき，$f^r\colon A^r \to B^r$ について $f^r(a) \in Z^r(B)$ が成り立つことを示せ．また，$a \in B^r(A)$ とすると $f^r(a) \in B^r(B)$ が成り立つことを示せ．

2) f^r は $f\colon H^r(A) \to H^r(B)$ を自然に誘導することを示せ．

3)

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\ f\ } B \xrightarrow{\ g\ } C \longrightarrow 0$$

を複体の完全列とする．

$$\cdots \longrightarrow H^{r-1}(C) \xrightarrow{\ \partial\ } H^r(A) \xrightarrow{\ f\ } H^r(B) \xrightarrow{\ g\ } H^r(C) \xrightarrow{\ \partial\ } \cdots$$

は完全系列であることを示せ．

問 8.4. $H^r_{\mathrm{dR}}(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & r = 0, n, \\ \{0\}, & r \neq 0, n \end{cases}$ が成り立つ．このことを以下に従って示せ．

1) $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ とみなす．そして $U_0 = (-1/6, 2/3) \mod \mathbb{Z},\ U_1 = (1/3, 7/6) \mod \mathbb{Z}$ とする．

a) U_0, U_1 を図示せよ．また，$U_0 \cap U_1$ を求めよ．

b) S^1 について主張が成り立つことを示せ．

2) $S^n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid {x_0}^2 + \cdots + {x_n}^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ と見なす．また，$U_0 = \{(x_0, \ldots, x_n) \in S^n \mid x_n > -1/2\},\ U_1 = \{(x_0, \ldots, x_n) \in S^n \mid x_n < 1/2\}$ と置く．

a) U_0, U_1 を図示せよ．また，$U_0 \cap U_1$ を求めよ．

b) $S^n,\ n > 1$ について主張が成り立つことを示せ．

問 8.5. $N \subset M$ を部分多様体とし，$\dim M = m,\ \dim N = n$ とする．$\{U_i\}$ を局所有限な N の開被覆であって，U_i は $D^n \times D^{m-n} \subset \mathbb{R}^m$ に，$U_i \cap N$ は $D^n \subset \mathbb{R}^n$ に同相なものとする．ここで，D^k で k 次元の単位開球を表す．また，$\{U_\lambda\}$ を局所有限な M の開被覆であって，U_i 達を全て含むものとする．

1) このような $\{U_i\},\ \{U_\lambda\}$ が取れることを示せ．
2) $\{\rho_\lambda\}$ を $\{U_\lambda\}$ に従属する 1 の分割とする．また，$V_i = U_i \cap N$ とする．$\omega \in \Omega^r(N)$ について，$\omega_i = \omega|_{V_i} \in \Omega^r(V_i)$ とする．このとき，$\mu_i \in \Omega^r(U_i)$ であって，$\mu_i|_{V_i} = \omega_i$ が成り立つものが存在することを示せ．また，$\mu = \sum \rho_i \mu_i$ とすると $\mu \in \Omega^r(M)$ であって，$\mu|_N = \omega$ が成り立つことを示せ．
3)
$$0 \to \Omega^*(M,N) \to \Omega^*(M) \to \Omega^*(N) \to 0$$
は複体の完全列であることを示せ．
4) $M = T^2$ とし，$\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ と同一視する．
   a) $N = \mathbb{R}(1,1)/\mathbb{Z}^2 \subset T^2$ とする．このとき，3) が成り立つことをなるべく直接的に確かめよ．
   b) $N = \mathbb{R}(1,\sqrt{2})/\mathbb{Z}^2 \subset T^2$ とする．このとき，3) が成り立たないことを示せ．

問 8.6. 1) $T^n = (S^1)^n$ とする．$H^*_{dR}(T^n)$ を求めよ．

2) $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ と見なす．また，$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ と見なし，これに従って $S^{n-1} \subset S^n$ と見なす．このとき，$H^*_{dR}(S^n, S^m)$，ただし $n \geq m$，を求めよ．

（以上）