

2018年度幾何学 III 演習問題 7 v1

'18/11/20 (火)

改変履歴. '18/11/20 : (v1) 初版作成. 概ね 11/20 の講義の分までの内容である.

境界付き多様体

問 7.1. M を境界を持つ n 次元の C^r 級多様体とする.

- 1) M が境界を持たない, 即ち $\partial M = \emptyset$ であることと, 任意の $p \in M$ について $\varphi_p(U_p) \subset \overset{\circ}{\mathbb{R}}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 < 0\}$ が成り立つことは同値であることを示せ. また, このとき M は通常の意味での C^r 級の多様体であることを示せ.
- 2) ∂M は境界を持たない $(n-1)$ 次元 C^r 級多様体であることを示せ. また, M が第二可算[†]ならば ∂M も第二可算であることを示せ.

ヒント: $\partial M = \emptyset$ ならば定義から直接従う. $\partial M \neq \emptyset$ とする. $V_p = \varphi_p^{-1}(\varphi_p(U_p) \cap \partial \mathbb{R}_+^n)$ として, $\{(V_p, \varphi_p|_{V_p})\}_{V_p \neq \emptyset}$ を考えてみよ.

問 7.2. 連結な境界付き多様体 M が向き付け可能であるならば, M の向きは二種類であることを示せ.

問 7.3. 定義 3.2.6 の $\{(V_\alpha, \psi_\alpha)\}$ は ∂M に向きを定めることを示せ.

問 7.4. M を境界を持つ多様体とする. TM は境界を持つ多様体であって, $\pi: TM \rightarrow M$ は $\text{rank } TM = \dim M$ を満たすベクトル束であることを示せ.

問 7.5 **. $\dim M = n$ とし, M は向き付け可能であるとする. $\iota: \partial M \rightarrow M$ を自然な埋め込みとし, $\iota_*: T(\partial M) \rightarrow TM$ とする.

- 1) ∂M 上の自明束 $\pi: \epsilon \rightarrow \partial M$ が存在して $TM|_{\partial M} \cong \epsilon \oplus \iota_*T(\partial M)$ が成り立つことを示せ.
- 2) M は向きづけられているとし, ω を M の体積要素とする. ∂M には M の向きにより定まる向きを入れ, ν を ∂M の体積要素とする. このとき, $p \in \partial M$ について, M の向きと整合的な, p を含む座標近傍 (U, φ) を, $\varphi(U)$ の座標を (x_1, \dots, x_n) とすると $\varphi(U) = \{x_1 \leq 0\}$ であるように選ぶと, $\varphi^*\omega = f dx_1 \wedge \varphi^*\nu$, $f > 0$ と表すことができることを示せ.

[†]パラコンパクトであって, 連結成分の数は高々可算個, としても同値である.

問 7.6. $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ は微分同相写像とする. $\zeta = \gamma \circ \varphi$ とすると $\int_{\zeta} \omega = \int_{\gamma} \omega$ が成り立つことを示せ.

問 7.7. $p, q \in M$ を基点とし, $\tau: [0, 1] \rightarrow M$ を $\tau(0) = p, \tau(1) = q$ を満たす連続写像とする. $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ を連続写像であって $\gamma(0) = \gamma(1) = p$ をみたすものとするとき, $\gamma^\tau: [0, 1] \rightarrow M$ を

$$\gamma^\tau(t) = \begin{cases} \tau(1 - 3t), & t \in \left[0, \frac{1}{3}\right], \\ \gamma(3t - 1), & t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \\ \tau(3t - 2), & t \in \left[\frac{2}{3}, 1\right] \end{cases}$$

により定める. また, $\tau_*: \pi_1(M, p) \rightarrow \pi_1(M, q)$ を

$$\tau_*([\gamma]) = [\gamma^\tau]$$

により定める.

- 1) τ_* は群の準同型であることを示せ.
- 2) τ' も $\tau'(0) = p, \tau'(1) = q$ を満たす連続写像とする. τ と τ' がホモトピックならば $\tau_* = \tau'_*$ が成り立つことを示せ. また, τ と τ' がホモトピックでなく, $\tau_* = \tau'_*$ も成り立たない例を一つ挙げよ.

問 7.8. 1) $\omega \in \Omega^1(M)$ は閉形式とする. 閉曲線 τ は区分的に C^∞ 級とする. $a \in \pi_1(M, p)$ を $a = [\gamma]$ と表すと,

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma^\tau} \omega$$

が成り立つことを示せ. 即ち, $\langle a, \omega \rangle = \langle \tau_* a, \omega \rangle$ が成り立つ.

- 2) 系 3.2.16 で定めた $\langle \cdot, \cdot \rangle: \pi_1(M, p) \times H_{\text{dR}}^1(M; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ は基点 p の選び方に依らないことを示せ.

(以上)