２０１７年度ベクトル解析（理I向け，足助担当）演習問題 １０ v1　　2017/6/23（金）

問 10.1. $\mathbb{R}^3$ には自然な向き（右手系）を入れる．X, Σ を以下のように定めるとき，積分 $\displaystyle\int_\Sigma X \cdot d\boldsymbol{A}$ を

a) ガウスの発散定理を用いて $\mathbb{R}^3$ 上の積分に帰着する方法，

b) ガウスの発散定理を用いずに直接求める方法

の二通りで求めよ．なお，いずれか一方が事実上実行できないものが幾つかある．また，Σ や X を図示せよ．

1) $X = \dfrac{\partial}{\partial x^1}$ とする．また，$p \in \mathbb{R}^3$ とし，$\Sigma = \{q \in \mathbb{R}^3 \mid \|q - p\| = 1\}$ とする．

2) $X = x^1 \dfrac{\partial}{\partial x^1} + x^2 \dfrac{\partial}{\partial x^2} + x^3 \dfrac{\partial}{\partial x^3}$ とする．また，$p \in \mathbb{R}^3$ とし，$\Sigma = \{q \in \mathbb{R}^3 \mid \|q - p\| = 1\}$ とする．

3) $X = x^1 \dfrac{\partial}{\partial x^1} + x^2 \dfrac{\partial}{\partial x^2} + x^3 \dfrac{\partial}{\partial x^3}$ とする．また，$\Sigma = \{q \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \theta, \varphi \in \mathbb{R},\ q = ((\cos\varphi)(2+\cos\theta), (\sin\varphi)(2+\cos\theta), \sin\theta)\}$ とする．

4) ※ この問はグリーンの定理に関するものである．
$X = (x^2 - y^2 - 1)\dfrac{\partial}{\partial x} + 2xy\dfrac{\partial}{\partial y}$ とし，$C_R(p) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - p^1)^2 + (y - p^2)^2 = R^2\}$ とする．$p = (0, 0)$, $R = \dfrac{1}{2}$, $1, 2$ と，$p = (\pm 1, 0)$, $R = 1, 4$ の場合に $\displaystyle\int_{C_R(p)} X \cdot dr$ を求めよ（dr は普段は dx と表している）．

5) $X = (x^2 - y^2 - z^2 - 1)\dfrac{\partial}{\partial x} + 2x\left(y\dfrac{\partial}{\partial y} + z\dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ とし，$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - p^1)^2 + (y - p^2)^2 + (z - p^3) = R^2\}$ とする．$p = (0, 0, 0)$, $R = \dfrac{1}{2}$, $1, 2$ と，$p = (\pm 1, 0, 0)$, $R = 1, 4$ の場合に $\displaystyle\int_\Sigma X \cdot d\boldsymbol{A}$ を求めよ．

問 10.2. $dz\left(\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) = 0$，$d\bar{z}\left(\dfrac{\partial}{\partial z}\right) = 0$，$d\bar{z}\left(\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) = 1$ がそれぞれ成り立つことを確かめよ．

問 10.3. $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy$ とすると，$df = \dfrac{\partial f}{\partial z}dz + \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}$ が成り立つことを示せ．

（以上）