問 9.1. $\mathbb{R}^2$ には自然な向き（右手系）を入れる．X, D を以下のように定めるとき，積分 $\displaystyle\int_D r(X)\,d\,\mathrm{vol}$ を

1) グリーンの定理を用いて線積分に帰着する方法,
2) グリーンの定理を用いずに直接求める方法

の二通りで求めよ．なお，いずれか一方が事実上実行できないものが幾つかある．それらに関してはいかに計算が無理であるか実感すれば良い．

1) $X = x^1\dfrac{\partial}{\partial x^1} + x^2\dfrac{\partial}{\partial x^2}$ とし，$D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$.
2) $X = -x^2\dfrac{\partial}{\partial x^2} + x^1\dfrac{\partial}{\partial x^2}$, $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$.
3) $X = ((x^1)^2 - (x^2)^2)\dfrac{\partial}{\partial x^1} - 2x^1x^2\dfrac{\partial}{\partial x^2}$, $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$.
4) $X = x^1\dfrac{\partial}{\partial x^1} + (x^2)^2\dfrac{\partial}{\partial x^2}$, $D = \{x = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 \mid 100(x^1)^2 + (x^2)^2 \leq 1\}$.
5) $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ を $\gamma(t) = (\cos 2\pi t, -10\sin 2\pi t)$ により定め，$\zeta\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ を $\zeta(t) = (1000\cos 2\pi t, 100\sin 2\pi t)$ により定める．$D = ((\mathbb{R}\setminus\zeta(\mathbb{R}))\cap(\mathbb{R}\setminus\gamma(\mathbb{R})))\cup\zeta(\mathbb{R})\cup\gamma(\mathbb{R})$ と置く（要は ζ と γ に囲まれた部分とする）．また，$X = ((x^1)^2 + (x^2)^2)x^1\dfrac{\partial}{\partial x^1} + ((x^1)^2 + (x^2)^2)x^2\dfrac{\partial}{\partial x^2}$ とする．

問 9.2. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上の 1-形式 ω を $\omega = \dfrac{-y}{x^2+y^2}dx + \dfrac{x}{x^2+y^2}dy$ により定める．また，対応してベクトル場 X を $X = \dfrac{-y}{x^2+y^2}\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{x}{x^2+y^2}\dfrac{\partial}{\partial y}$ により定める．

1) $r(X) = 0$ が成り立つことを示せ（$d\omega = 0$ としても同じことである）.
2) $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ を C^1 級の閉曲線とする．$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\gamma X \cdot dr$（$\gamma$ に沿った線積分である．普段は dx を用いているが記号が重なるので dr とした）を求めよ．
   ※ 積分は $\displaystyle\int_\gamma \omega = \int_{[0,1]} \gamma^*\omega$ としても同じことである．なお，等号は定義である．
3) 2) により定まる値を $\rho(\gamma)$ とする．$\rho(-\gamma) = -\rho(\gamma)$ が成り立つことを示せ．ここで，$-\gamma$ は γ の向きを逆にした曲線を表す.
4) D を $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 内の領域（境界を含む）D とし，$\partial D = \gamma_1 + \gamma_2$ とすると $\rho(\gamma_1) = -\rho(\gamma_2)$ が成り立つことを示せ.

4') 2) により定まる値を $\rho(\gamma)$ とする．$\rho(\gamma_1) \neq -\rho(\gamma_2)$ とすると，$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 内の領域（境界を含む）D であって $\partial D = \gamma_1 + \gamma_2$ が成り立つものは存在しないことを示せ．

定義 9.3. $z = x + \sqrt{-1}y \in \mathbb{C}$ とする．どうしてそうするかはともかく，

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

と定める．

問 9.4. $z = x + \sqrt{-1}y \in \mathbb{C}$ とする．$\dfrac{\partial z}{\partial z} = \dfrac{\partial(x+\sqrt{-1}y)}{\partial z} = 1,\ \dfrac{\partial z}{\partial \bar{z}} = 0$ が成り立つことを（全て x, y の式に書き直して）示せ．また，$\dfrac{\partial \bar{z}}{\partial z} = 0,\ \dfrac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}} = 1$ が成り立つことを示せ．

定義 9.5 ****.** $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ であって，$\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ が成り立つ物を（複素）**正則函数**と呼ぶ．正則函数は解析的（テーラー展開可能）であるので,（複素）**解析的関数**とも呼ぶ[†1]．

グリーンの定理は正則函数や調和函数と深く関わる．

問 9.6. $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を正則とし，$f = u + \sqrt{-1}v$ と実部と虚部に分けて表す．f の変数を $z = x + \sqrt{-1}y$ とする．

1) u, v は**調和函数**である，即ち $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ とすると $\Delta u = \Delta v = 0$ が成り立つことを示せ．
2) $\omega = udx - vdy,\ \eta = vdx + udy$ と置く．これらに対応するベクトル場をそれぞれ $X = u\dfrac{\partial}{\partial x} - v\dfrac{\partial}{\partial y},\ Y = v\dfrac{\partial}{\partial x} + u\dfrac{\partial}{\partial y}$ とすると，$r(X) = r(Y) = 0$ が成り立つことを示せ．
※ これは $d\omega = d\eta = 0$ が成り立つことの言い換えである．また，$dz = dx + \sqrt{-1}dy$ として $\mu = fdz$ とすると $d\mu = 0$ が成り立つ．

より詳しいことは時間があれば改めて扱う．

問 9.7. $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ は正則だとする．この時 f は定数であることを示せ．

従って，例えば $f(x,y) = x^2 + y^2$ などとすると f は正則ではない．

[†1] 現時点では難しいように思えるので星は二つ付けているが，たいへん重要である．

問 9.8. $D \subset \mathbb{C}$, $f, g\colon D \to \mathbb{C}$ とし，f, g は正則とする．このとき，$f \pm g$, fg は正則であることを示せ．また，g が 0 にならないとすると f/g は正則であることを示せ．

問 9.9. f を複素数係数の，複素変数 z に関する多項式とする．$z = x + \sqrt{-1}y$ として f を x, y の函数とみなすと f は正則であることを示せ．

問 9.10. $\mathbb{R}^2$ の標準的な座標を (x, y) とする．また，函数 f を以下のように定める．それぞれの場合について，$z = x + \sqrt{-1}y$ として $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ とみなしたとき f は正則であることを示せ．また，正則である場合には必ず $z = x + \sqrt{-1}y$ のみの函数として表すことができる[†2]ので，そのような表示を求めよ．

1) $f(x, y) = x + \sqrt{-1}y$（$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ である）
2) $f(x, y) = \left(\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} x^i\right) \left(\left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} y^{2j}\right) + \sqrt{-1} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} y^{2k+1}\right)\right)$（$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ である）
3) $D = \operatorname{Re} z > 0$ とし，$f\colon D \to \mathbb{C}$ を $f(x, y) = \log(x + \sqrt{-1}y)$ により定める．ここで，実部が正であるような $z \in \mathbb{C}$ について $\log z$ は $e^w = z$ なる w として定める．ここで，w の選び方には $2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z}$ の任意性があるが，ここでは $\log 1 = 0$ になるように定める．

（以上）

[†2] これは非自明なことである．