２０１７年度ベクトル解析（理I向け，足助担当）演習問題 7 v1 2017/5/26（金）

問に時々付けている「$*$」は難しかったりやや脱線気味であって，場合によっては外の問を優先して解いてもよいことを意味する.「$*$」の数が多ければ多いほどその度合いが高い.

問 7.1. （Σ や X は図示してみること.）

1) $\Sigma = \{(x^1,x^2,x^3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2 = r^2\}$，$r>0$，$f(x^1,x^2,x^3) = 1$ とする．面積分
$$\int_{|\Sigma|} f\,dA$$
を求めよ.

2) $\Sigma = \{(x^1,x^2,x^3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2 = r^2\}$，$r>0$，$f(x^1,x^2,x^3) = (x^1)^2+(x^2)^2$, $g = r^2-(x^3)^2$ とする．面積分
$$\int_{|\Sigma|} f\,dA, \quad \int_{|\Sigma|} g\,dA$$
を求めよ.

3) $\Sigma = \{(x^1,x^2,x^3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2 = r^2\}$，$r>0$，$X = x^1\dfrac{\partial}{\partial x^1}+x^2\dfrac{\partial}{\partial x^2}+x^3\dfrac{\partial}{\partial x^3}$ とする．面積分
$$\int_{\Sigma} X\cdot d\boldsymbol{A}$$
を求めよ.

4) $\Sigma = \{(x^1,x^2,x^3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2 = r^2\}$，$r>0$，$X = \dfrac{\partial}{\partial x^1}$ とする．面積分
$$\int_{\Sigma} X\cdot d\boldsymbol{A}$$
を求めよ.

※ 球面だけではなく，いろいろな曲面（曲面片）と函数，ベクトル場について面積分を求める練習をしておくこと．線積分についても同様である.

問 7.2. $D \subset \mathbb{R}^2$ とし，$\varphi\colon D \to S \subset \mathbb{R}^3$ を曲面片とする．座標を入れ替えて $D' = \{w = (w^1,w^2) \in \mathbb{R}^2 \mid (w^2,w^1) \in D\}$，$\varphi'(w) = \varphi(w^2,w^1)$ とすると，$\varphi\colon D \to S$ と $\varphi'\colon D' \to S$ は S に逆の向きを定めることを示せ.

問 7.3. $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 X, Y を

$$X = x^1\frac{\partial}{\partial x^1} + x^2\frac{\partial}{\partial x^2},$$
$$Y = -x^2\frac{\partial}{\partial x^1} + x^1\frac{\partial}{\partial x^2}$$

により定める．

1) $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ならば $X(p),\ Y(p) \in T_p\mathbb{R}^2$ は線型独立であることを示せ．

2) X, Y を $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上で極座標 (r,θ)，ただし $(x^1,x^2) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$，を用いて表せ．

   ヒント：問 2.9 を用いると良い．

3) X に対応する $\mathbb{R}^2$ 上の 1-形式は $x^1dx^1 + x^2dx^2$ であることを確かめよ[†1]．また，Y に対応する $\mathbb{R}^2$ 上の 1-形式 ω を求めよ．

4) $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ を $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ により定める．$\displaystyle\int_\gamma X\cdot dr,\ \int_\gamma Y\cdot dr$ を求めよ．

5) $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $Z = f^1\dfrac{\partial}{\partial x^1} + f^2\dfrac{\partial}{\partial x^2}$ について $r(Z) = \dfrac{\partial f^2}{\partial x^1} - \dfrac{\partial f^1}{\partial x^2}$ と定める．$r(Z)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ である．$r(X),\ r(Y)$ を求めよ．また，$D = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \|u\| \le 1\}$ とするとき，$\displaystyle\int_D r(X)\,du^1du^2,\ \int_D r(Y)\,du^1du^2$ を求めよ．ここで $u = (u^1,u^2)$ は $\mathbb{R}^2$ の標準的な座標である．

   ※ $\gamma = \partial D$ が成り立つことに注意せよ．

6) X のスカラーポテンシャルを一つ求めよ．また，Y のスカラーポテンシャルは存在しないことを示せ．

   ヒント：$Y = \operatorname{grad} f$ と仮定して $r(Y)$ を計算してみよ．

7) $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$，$\gamma(0) = \gamma(1)$ とする．$\gamma(t) = (\cos 2\pi nt, \sin 2\pi nt)$ とするとき，$\displaystyle\int_\gamma \omega$ を求めよ．

8**) 7) と同じ条件をみたすいろいろな γ について $\displaystyle\int_\gamma \omega$ を求め，必ず 2π の整数倍になることを観察せよ．可能であれば証明を考えてみよ．

問 7.4. 問 7.1 の 3), 4) について，X に対応する 2-形式 ω を求めよ．また，$\displaystyle\int_\Sigma \omega$ を求めよ．
※ X に対応する 1-形式と ω とは当然異なる．

[†1]厳密には $\mathbb{R}^2$ には $\mathbb{R}^2$ の標準的なユークリッド計量により定まるリーマン計量を入れている．

問 7.5. $\mathbb{R}^3$ 上のベクトル場 X, Y を

$$X = -x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^2}$$

により定める．ここで $x = (x^1, x^2, x^3)$ は $\mathbb{R}^3$ の標準的な座標とする．また，

$$T = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \theta, \rho \in \mathbb{R},\ (x^1, x^2, x^3) = ((\cos\theta)(2 + \cos\varphi), (\sin\theta)(2 + \cos\varphi), \sin\varphi)\}$$

と置く．

1) X, T を図示せよ．
2) X に対応する $\mathbb{R}^3$ 上の 2-形式は $-x^2 dx^2 \wedge dx^3 + x^1 dx^3 \wedge dx^1$ であることを確かめよ．
3) $Z = f^1 \dfrac{\partial}{\partial x^1} + f^2 \dfrac{\partial}{\partial x^2} + f^3 \dfrac{\partial}{\partial x^3}$ について

$$\operatorname{div} Z = \frac{\partial f^1}{\partial x^1} + \frac{\partial f^2}{\partial x^2} + \frac{\partial f^3}{\partial x^3}$$

と定める．$\operatorname{div} X$ を求めよ．

（以上）