２０１７年度ベクトル解析（理I向け，足助担当）演習問題 4 v3　　　2017/4/28（金）
’17/4/28：書きかけのものを誤って公開してしまったので修正．v2 であるが事実上は v1 である．
’17/5/10：9, 10 ページについて誤植を修正．また，6 ページの冒頭の文章を少し変更した．

線積分に関する補足

問 4.1. $J = [c, d]$ とし，$\varphi\colon J \to I$ を C^1 級かつ $D\varphi \geq 0$ あるいは $D\varphi \leq 0$ が成り立つとする．このとき，$\zeta = \gamma \circ \varphi$ と置くと

$$\int_\gamma f(x)\,|dx| = \int_\zeta f(x)\,|dx|$$

が成り立つことを示せ．
※ 講義では $D\varphi > 0$ あるいは $D\varphi < 0$ としたが，条件をもう少し緩くできる．証明は全く同様である．従って

$$\int_{|C|} f(x)\,|dx| = \int_\gamma f(x)\,|dx|$$

は $|C|$ の C^1 級の，微分同相とは限らないが，符号は逆にはならないようなパラメータの差には依らずに定まる．

線積分

積分路のパラメータ付けはそれなりに自由度が高いが，何をしても良い訳ではない．それでも，例えば線分や円弧といった「普通の」曲線に関しては，特に断らなければ「普通の」パラメータ付けあるいはそれと C^1 級の写像で結びつくものしか考えず，それ以外のパラメータ付けを考えるときには明示するのがごく一般的（常識的）である．

問 4.2. 以下の線積分を求めよ．

1) $\gamma\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ を $\gamma(t) = -t$ により定める．$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(t) = t^2$，$\mathbb{R}$ 上のベクトル場 X を X を $X = f\dfrac{\partial}{\partial t}$ とし，

$$\int_\gamma f(t) \cdot |dt|, \quad \int_\gamma X \cdot dt$$

をそれぞれ求めよ．また，$\gamma\colon [0, \log 2] \to \mathbb{R}$ を $\zeta(t) = -e^t + 1$ により定め，上と同じ線積分を求めよ．$\gamma\colon [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ を $\gamma(t) = -\cos t$，$\gamma\colon [-1, 0] \to \mathbb{R}$ を $\gamma(t) = t^3$ として同様の積分を求めよ．

2) $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$ を $\gamma(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, t)$ により定める．

$$\int_\gamma 1 \cdot |dx|$$

（即ち，γ の弧長）を求めよ．また，$\mathbb{R}^3$ 上のベクトル場 X を

$$X(x^1, x^2, x^3) = -x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^2}$$

により定めるとき，

$$\int_\gamma X \cdot dr$$

を求めよ．

3) （1 形式の線積分）$\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ を $\gamma(t) = e^{2\pi\sqrt{-1}t}$ により定める．

$$\int_\gamma \frac{1}{z^n} dz = \int_\gamma \frac{1}{e^{2\pi\sqrt{-1}nt}} 2\pi\sqrt{-1} e^{2\pi\sqrt{-1}t} dt$$

を求めよ．なお，右辺は左辺の定義である．また，積分は実部と虚部に分けて計算すればよい（それが定義である）．

具体的な計算は大切であるが，ここではこれ以上扱わない．教科書（参考書）などを参照して各自で練習すること．

曲線の弧長

重要な曲線のパラメータの一つとして弧長パラメータが挙げられる．まず弧長を定める．

定義 4.3. $I = [a,b]$ とし，$f\colon I \to \mathbb{R}^n$ を C^1 級の曲線とする．$f(t) = {}^t(f^1, \ldots, f^n)$ と表しておいて

$$\begin{aligned} \mathrm{length}(f) &= \int_I \sqrt{\left(\frac{df^1}{dt}(t)\right)^2 + \cdots + \left(\frac{df^n}{dt}(t)\right)^2}\, dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{df^1}{dt}(t)\right)^2 + \cdots + \left(\frac{df^n}{dt}(t)\right)^2}\, dt \end{aligned}$$

$$= \int_a^b \|Df(t)\|_{f(t)}\, dt$$

と置き，f（あるいは $f(I)$）の**長さ**と呼ぶ.

問 4.4. $I = [a, b]$ とし，$f\colon I \to \mathbb{R}^n$ を C^1 級の曲線とする．このとき，$0 \leq \mathrm{length}(f) < +\infty$ が成り立つことを示せ.

注 4.5. f が C^0 級であっても f の長さを，f が C^1 級である場合には定義 4.3 と一致するように定めることができる．しかし，長さが無限大になったり，いろいろと難しいことが起きる.

問 4.6. $I = [a, b]$ とし，$f\colon I \to \mathbb{R}^n$ を C^r 級（$r \geq 1$）の正則な曲線とすると，以下が成り立つことを示せ.

1) $a \leq s \leq b$ について $f_s\colon [a, s] \to \mathbb{R}^n$ を f の $[a, s]$ への制限とする．このとき，$\mathrm{length}(f_s)$ は s に関して C^r 級である．また，$D\mathrm{length}(f_s) > 0$ が成り立つ.
2) $a < b$ とし，$l = \mathrm{length}(f)$ と置く．このとき，$l > 0$ が成り立つ．また，向きを保つパラメータの取り替え $\varphi\colon [0, l] \to I$ が存在して $g = f \circ \varphi$ と置くと $\|Dg(u)\|_{g(u)} = 1$ が成り立つ．また，$\mathrm{length}(g_\lambda) = \lambda$ が成り立つ．ここで，g_λ は g の $[0, \lambda] \subset [0, l]$ への制限である．g を $f(I)$ の**弧長パラメータ表示**，パラメータ s を**弧長パラメータ**と呼ぶ.

曲線の曲率 *

曲線の曲がり具合を表す量の一つに曲率がある．以下では特に $\mathbb{R}^2$ あるいは $\mathbb{R}^3$ 内の曲線を考える.

<u>$\mathbb{R}^2$ 内の曲線の曲率</u>

$\mathbb{R}^2$ 内の曲線を**平面曲線**と呼ぶ．ζ を弧長パラメータで表示された $\mathbb{R}^3$ 内の正則な曲線とする．$e_1 = D\zeta$ とすれば $e_1(s)$ は 0 にならない．そこで，$e_2(s)$ を $\zeta(s)$ において $e_1(s)$ を $\dfrac{\pi}{2}$ だけ反時計回りに回転させて得られるベクトルとする．正確には，$e_2(s)$ を，$(e_1(s), e_2(s))$ が $T_{\zeta(s)}\mathbb{R}^2$ の基底であって，$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ とすると，ある θ について $(e_1(s), e_2(s))R(\theta) = \left(\dfrac{\partial}{\partial x^1}_{\zeta(s)}, \dfrac{\partial}{\partial x^2}_{\zeta(s)} \right)$ が成り立つものとする．$\dfrac{de_1}{ds}(s)$ は $e_1(s)$ と直交するので，ある $\kappa'(s) \in \mathbb{R}$ が存在して $\dfrac{de_1}{ds}(s) = \kappa'(s)e_2(s)$ が成り立つ．$\|e_2(s)\| = 1$ が成り立つので，$\kappa(s) = |\kappa'(s)|$ が成り立つ.

定義 4.7. κ' を（平面曲線）ζ の**曲率**と呼ぶ.

さて，$\|e_2(s)\| = 1$ であるから，

$$g_{\zeta(s)}\left(\frac{de_2}{ds}(s), e_2(s)\right) + g_{\zeta(s)}\left(e_2(s), \frac{de_2}{ds}(s)\right) = 2g_{\zeta(s)}\left(\frac{de_2}{ds}(s), e_2(s)\right) = 0$$

が成り立つ．従って $\dfrac{de_2}{ds}(s)$ と $e_2(s)$ は直交する．そこで $\dfrac{de_2}{ds}(s) = \alpha(s)e_1(s)$ と表す．一方，$g_{\zeta(s)}(e_1(s), e_2(s)) = 0$ なので，

$$\begin{aligned}
0 &= g_{\zeta(s)}\left(\frac{de_1}{ds}(s), e_2(s)\right) + g_{\zeta(s)}\left(e_1(s), \frac{de_2}{ds}(s)\right)\\
&= g_{\zeta(s)}\left(\kappa'(s)e_2(s), e_2(s)\right) + g_{\zeta(s)}\left(e_1(s), \alpha(s)e_1(s)\right)\\
&= \kappa'(s) + \alpha(s)
\end{aligned}$$

が成り立つ．従って $\alpha = -\kappa'$ なので

$$\begin{pmatrix} \dfrac{de_1}{ds}(s) & \dfrac{de_2}{ds}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1(s) & e_2(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) \\ \kappa(s) & 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つ．右辺に現れるような，$\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ の形をした $M_2(\mathbb{R})$ の元を 2 次の**実交代行列**と呼ぶ．実交代行列は内積やリーマン計量と関連が深いが，やや進んだ事柄なのでここではこれ以上述べない．

<u>$\mathbb{R}^3$ 内の曲線の捩率</u>

$\mathbb{R}^3$ 内の曲線は**空間曲線**と呼ばれる．ζ を弧長パラメータで表示された $\mathbb{R}^3$ 内の曲線とする．$e_1 = D\zeta$ とし，$\kappa = \left\|\dfrac{de_1}{ds}\right\|$ を ζ の曲率とする．今の場合には $e_2(s)$ を自然に定めることはできないので，平面曲線の場合を踏まえて，$e_2(s) = \dfrac{1}{\kappa(s)}\dfrac{de_1}{ds}(s)$ と定める．そのために，以下では $\kappa(s)$ は 0 にならないと仮定する．実際には $\kappa(s) > 0$ である．

定義 4.8. ζ を弧長パラメータで表示された $\mathbb{R}^3$ 内の曲線とする．$e_1 = D\zeta$ とし，$\kappa = \left\|\dfrac{de_1}{ds}\right\|$ を ζ の曲率とする．また，$\kappa(s)$ は 0 にならない（常に正の値を取る）と仮定する．このとき，

$$\begin{aligned}
e_2(s) &= \frac{1}{\kappa(s)}\frac{de_1}{ds}(s),\\
e_3(s) &= e_1(s) \times e_2(s)
\end{aligned}$$

と定める．ここで $\times$ はベクトル積（後日扱う）を表す．(e_1, e_2, e_3) を**フレネ標構**と呼ぶ[†1]と.

[†1] フレネはフルネ呼んだ方が原語（Frenet）には近いが，多くはフレネと表す.

補題 4.9. $(e_1(s), e_2(s), e_3(s))$ は $T_{\zeta(s)}\mathbb{R}^3$ の正規直交基底であって，$\left(\dfrac{\partial}{\partial x^1}_{\zeta(s)}, \dfrac{\partial}{\partial x^2}_{\zeta(s)}, \dfrac{\partial}{\partial x^3}_{\zeta(s)}\right)$ と同じ向きを定める．即ち，P を $\left(\dfrac{\partial}{\partial x^1}_{\zeta(s)}, \dfrac{\partial}{\partial x^2}_{\zeta(s)}, \dfrac{\partial}{\partial x^3}_{\zeta(s)}\right)$ から $(e_1(s), e_2(s), e_3(s))$ への基底の変換行列とすると $\det P > 0$ が成り立つ．

証明. いずれもベクトル積の性質である[†2]．ベクトル積の性質により $e_3(s)$ は $e_1(s)$, $e_2(s)$ と直交する．また，$e_1(s)$ と $e_2(s)$ は直交するから，ベクトル積の性質から $e_3(s)$ の大きさは 1 に等しいことが分かる．最後に，定義により $\left(\dfrac{\partial}{\partial x^1}_{\zeta(s)}\ \dfrac{\partial}{\partial x^2}_{\zeta(s)}\ \dfrac{\partial}{\partial x^3}_{\zeta(s)}\right) = (e_1(s)\ e_2(s)\ e_3(s))P$ が成り立つから，$1 = \det\left(\dfrac{\partial}{\partial x^1}_{\zeta(s)}\ \dfrac{\partial}{\partial x^2}_{\zeta(s)}\ \dfrac{\partial}{\partial x^3}_{\zeta(s)}\right) = \det(e_1(s)\ e_2(s)\ e_3(s))\det P$ が成り立つ．やはりベクトル積の性質により $\det(e_1(s)\ e_2(s)\ e_3(s)) = \|e_3(s)\|^1 = 1 > 0$ なので $\det P = 1 > 0$ が成り立つ． $\square$

注 4.10. 実際には補題 4.9 の P は直交行列であって $\det P = 1$ をみたす（このような P を特殊直交行列と呼び，n 次の特殊直交行列全体のなす集合を SO_n などで表す）．

命題 4.11. 実数値函数 τ が存在して

$$\left(\frac{de_1}{ds}(s)\ \frac{de_2}{ds}(s)\ \frac{de_3}{ds}(s)\right) = (e_1(s)\ e_2(s)\ e_3(s))\begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つ．この式を**フレネ–セレの公式**と呼ぶ．τ を ζ の **<ruby>振率<rt>れいりつ</rt></ruby>** と呼ぶ．

証明. 定義により $\dfrac{de_1}{ds}(s) = \kappa(s)e_2(s)$ が成り立つ．s に依らず $\|e_2(s)\| = 1$ なので，$\dfrac{de_2}{ds}(s) = \alpha(s)e_1(s) + \beta(s)e_3(s)$ がある函数 α, β について成り立つ．一方，$g_{\zeta(s)}(e_1(s), e_2(s)) = 0$ が成り立つので $0 = g_{\zeta(s)}\left(\dfrac{de_1}{ds}(s), e_2(s)\right) + g_{\zeta(s)}\left(e_1(s), \dfrac{de_2}{ds}(s)\right) = \kappa(s) + \alpha(s)$ が成り立つ．従って $\alpha(s) = -\kappa(s)$ が成り立つ．$\tau(s) = \beta(s)$ とすれば $\dfrac{de_2}{ds}(s) = -\kappa(s)e_1(s) + \tau(s)e_3(s)$ が成り立つ．e_2 の場合と同様に，$\dfrac{de_3}{ds}(s) = \alpha'(s)e_1(s) + \beta'(s)e_2(s)$ がある函数 α', β' について成り立つ．また，$i = 1, 2$ について

$$0 = g_{\zeta(s)}\left(\frac{de_i}{ds}(s), e_3(s)\right) + g_{\zeta(s)}\left(e_i(s), \frac{de_3}{ds}(s)\right)$$

が成り立つ．$i = 1$ とすると $0 + \alpha'(s) = 0$ を得る．また，$i = 2$ とすると $\tau(s) + \beta'(s) = 0$ を得る．従って $\dfrac{de_3}{ds}(s) = -\tau(s)e_2(s)$ が成り立つ． $\square$

[†2]ベクトル積について学んでから理解すればよい．

3 次の実交代行列が現れるのは平面曲線の場合と同様の理由による．

1-形式について *

線積分は函数に関するものであれ，ベクトル場に関するものであれ，曲線の速度ベクトルに線型に依存する量（スカラー）を積分して定まる．従って，線積分を行う際には速度ベクトルに対してスカラーを与える対応（写像）を何らかの形で用いているはずである．例えばベクトル場の線積分は内積 $\langle X(\gamma(t)) \mid D\gamma(t)\rangle$ を t に関して積分して得られるが，$\langle X(\gamma(t)) \mid \cdot \rangle$ は γ の速度ベクトルに対してスカラーを与える写像である．この（線型）写像が 1-形式である．函数に関する線積分も大差ないので，以下ではベクトル場に関する線積分について述べる．$\mathbb{R}^n$ 上のベクトル場

$$X = f^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + f^n \frac{\partial}{\partial x^n}$$

の $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$（$I$ は閉区間とする）上の線積分は $f_i = f^i$ とした上で

$$\omega = f_1 dx^1 + \cdots + f_n dx^n$$

と定めた上で

$$\int_\gamma X \cdot dr = \int_\gamma \omega$$

と表すことができた．問題は ω とは何か，である．実際に積分するものは

$$f_1(\gamma(t))\frac{d\gamma^1}{dt}(t) + \cdots + f_n(\gamma(t))\frac{d\gamma^n}{dt}(t) \tag{4.12}$$

である．先にベクトル場が定まっていて，γ を指定すると線積分が定まると考えるならば，先に「$f_1, \ldots, f_n$ の何とか」が定まっていて，γ を定めると被積分函数 (4.12) が定まる．従って，ω は γ に対して被積分函数 (4.12) を与える対応である．ところで，例えば函数の γ に沿った微分は γ 自体ではなく，γ の速度ベクトルにより定まった．これは今の場合も同じである．即ち，(4.12) は γ そのものではなく，γ の速度ベクトルにより定まる．このことを踏まえると以下の一連の定義に至る．一部は問題として示す．

定義 4.13. $p \in \mathbb{R}^n$ とする．線型写像 $dx^i_p\colon T_p\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を条件

$$dx^i_p\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

により定める．また，$dx_p^1, \ldots, dx_p^n$ を基底とする線型空間を $T_p^*\mathbb{R}^n$ あるいは $(T_p\mathbb{R}^n)^*$ と表し，p における $\mathbb{R}^n$ の**余接空間**と呼ぶ．$U \subset \mathbb{R}^n$ が開集合であるとき，$T^*U = \bigcup_{p\in U} T_p^*U$ と置き，U の余接空間と呼ぶ．ただし，$p \neq q$ の時 $T_p^*U \cap T_q^*U = \varnothing$ とする．

$T_p^*\mathbb{R}^n$ は $T_p\mathbb{R}^n$ の**双対空間**（そうつい）である．U が $\mathbb{R}^n$ の開集合でなくとも U の余接空間が定まることがあるが，定義には少し工夫が要る（これは接空間と同様である）．

問 4.14. dx_p^i がきちんと定まる（well-defined である）ことを示せ．
※ dx_p^i は条件により定めている．従って，本当に条件より写像が一意的に定まるか（言い換えれば，二つ以上の異なる写像で条件をみたすものがないか），また，本当に条件をみたす写像が存在するかが問題となる．

問 4.15. $\varphi \in T_p^*\mathbb{R}^n$, $v \in T_p\mathbb{R}^n$ について

$$\varphi = b_1 dx_p^1 + \cdots + b_n dx_p^n,$$
$$v = a^1 \frac{\partial}{\partial x^1}_p + \cdots + a^n \frac{\partial}{\partial x^n}_p$$

と表すと，

$$\varphi(v) = b_1 a^1 + \cdots + b_n a^n$$

が成り立つことを示せ．

定義 4.16. $U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とする．ω が U 上の **1-形式**であるとは，ω が U から T^*U への写像であって $\omega(p) \in T_p^*U = T_p^*\mathbb{R}^n$ が成り立つことを言う．より具体的には

$$\omega(p) = f_1(p)dx_p^1 + \cdots + f_n(p)dx_p^n$$

と表すことができる（$\omega(p)$ は ω_p とも表す）．このことを

$$\omega = f_1 dx^1 + \cdots + f_n dx^n$$

と表す．また，$\omega(p)$ を ω_p とも表す．$f_1, \ldots, f_n$ が C^r 級であるとき，ω は C^r 級であると言う．

すると $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ について，$D\gamma(t) \in T_{\gamma(t)}\mathbb{R}^n$ とみなすことにすると

$$
\begin{aligned}
&\omega_{\gamma(t)}(D\gamma(t)) \\
&= \left(f_1(\gamma(t))dx^1_{\gamma(t)} + \cdots + f_n(\gamma(t))dx^n_{\gamma(t)}\right)\left(\frac{d\gamma^1}{dt}(t)\frac{\partial}{\partial x^1}_{\gamma(t)} + \cdots + \frac{d\gamma^n}{dt}(t)\frac{\partial}{\partial x^n}_{\gamma(t)}\right) \\
&= f_1(\gamma(t))\frac{d\gamma^1}{dt}(t) + \cdots + f_n(\gamma(t))\frac{d\gamma^n}{dt}(t)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

定義 4.17. $\gamma\colon I = [a,b] \to \mathbb{R}^n$ を C^1 級の曲線とし，ω を $\gamma(I)$ を含む $\mathbb{R}^n$ の開集合で定まった C^0 級の 1-形式とする．このとき，

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega(D\gamma(t))dt$$

と定め，ω の γ に沿った**線積分**と呼ぶ．

このように定めると，C^r 級のベクトル場 $X = f^1\frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + f^n\frac{\partial}{\partial x^n}$ について，1-形式 ω を $\omega = f_1dx^1 + \cdots + f_ndx^n$，ただし $f_i = f^i$ と定めれば，ω は C^r 級であって

$$\int_\gamma X \cdot dr = \int_\gamma \omega$$

ただし $I = [a,b]$，が成り立つ．

すぐには大きな御利益はないが，次のように定めると有用である．

定義 4.18 (1-形式の引き戻し). $\omega = f_1dx^1+\cdots+f_ndx^n$ を $U \subset \mathbb{R}^n$ 上の C^r 級の 1-形式とする．$V \subset \mathbb{R}^m$ を開集合とし，$\gamma\colon V \to U$ を C^s 級の写像とする．このとき，$\gamma = (\gamma^1, \ldots, \gamma^n)$ と座標を用いて表し，

$$\gamma^*\omega = \sum_{\substack{1\le k\le n\\ 1\le l\le m}} (f_k \circ \gamma)\frac{\partial\gamma^k}{\partial x^l}dx^l$$

と置いて **ω の γ による引き戻し**と呼ぶ．$\gamma^*\omega$ は $u = \min\{r, s-1\}$ とすると C^u 級の 1-形式である．

$I = [a,b]$ とすれば

$$\int_\gamma X \cdot dr = \int_\gamma \omega = \int_I \gamma^*\omega = \int_a^b \gamma^*\omega,$$

が成り立つ．ただし，I には自然な向きが入っていると考えている．

ベクトル場，リーマン計量と 1-形式 **

線積分に関して 1-形式を考えることに何の意味があるか疑問に思うかも知れない．というのは線積分を求めるには内積を取って積分すれば良いからである．しかし，実際には大きな差がある．1-形式の積分は曲線を定めると，曲線や $\mathbb{R}^n$ に関する付加的な情報を用いずに定まる．実際，曲線の速度ベクトルは曲線により自動的に定まる．また，$\mathbb{R}^n$（や，一般にはその開集合）の接空間 $T\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ のみから定まる．余接空間 $T_p^*\mathbb{R}^n$ は $T_p\mathbb{R}^n$ の双対空間であるから，これは $T_p\mathbb{R}^n$ のみから定まる（従って，$\mathbb{R}^n$ から定まる）．全体の余接空間 $T^*\mathbb{R}^n$ は $T_p^*\mathbb{R}^n$ の和集合であるから，やはり $\mathbb{R}^n$ のみから定まる．よって，ω を $\mathbb{R}^n$ 上の C^0 級の 1-形式とし，$\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ を C^1 級の曲線とすれば $\displaystyle\int_\gamma \omega$ は $\mathbb{R}^n$ と ω, γ により定まる．一方，ベクトル場の線積分には内積（より一般にはリーマン計量）が必要である．くどくなるので繰り返さないが，上と同様に考えると $\langle X(\gamma(t)) \mid D\gamma(t)\rangle$ を計算する必要がある．それではこの余計なリーマン計量は何のために必要であるのか，ということが問題になる．実際にはリーマン計量は**添字の上げ下げ**と呼ばれる操作を行うために必要である[†3]．$X = f^1\dfrac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + f^n\dfrac{\partial}{\partial x^n}$ とすると，今は $\left\langle X(\gamma(t)) \,\middle|\, \dfrac{\partial}{\partial x^i}_{\gamma(t)} \right\rangle_{\gamma(t)} = f^i(\gamma(t))$ であるから，写像 $\langle X(\gamma(t)) \mid \cdot\, \rangle$ に対応する 1-形式は $f^1dx^1 + \cdots + f^ndx^n$ である．これを $f_1dx^1 + \cdots + f_ndx^n$ と表すのであれば $f_i = f^i$ とすればよい．つまり，f^i の添字が下に下がって f_i となっている．さて，$\mathbb{R}^n$ の一般のユークリッド計量 h を考え，h により定まる $\mathbb{R}^n$ のリーマン計量を g とする．定義により $g_p\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}_p, \dfrac{\partial}{\partial x^j}_p\right) = h(e_i, e_j)$ である．$\mathbb{R}^n$ のユークリッド計量を標準的なものから h に取り替えてしまっているので，被積分函数に現れる項は $\left\langle X(\gamma(t)) \,\middle|\, \dfrac{\partial}{\partial x^j}_{\gamma(t)} \right\rangle_{\gamma(t)}$ から

$$g_{\gamma(t)}\left(X(\gamma(t)) \,\middle|\, \frac{\partial}{\partial x^j}_{\gamma(t)} \right)$$

に変わる．$g_{ij} = h(e_i, e_j)$ とすれば

$$g_{\gamma(t)}\left(X(\gamma(t)) \,\middle|\, \frac{\partial}{\partial x^j}_{\gamma(t)} \right) = g_{\gamma(t)}\left(\sum_{i=1}^n f^i(\gamma(t))\frac{\partial}{\partial x^i}_{\gamma(t)} \,\middle|\, \frac{\partial}{\partial x^j}_{\gamma(t)} \right)$$

[†3] リーマン計量はいろいろな用途のために必要である．添字の上げ下げは大事な用途の一つであるが，全てと言うには程遠い．

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} f^i(\gamma(t))g\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\gamma(t)} \middle| \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{\gamma(t)}\right)_{\gamma(t)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} f^i(\gamma(t))g_{ij}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．よって

$$
f_j(p) = \sum_{i=1}^{n} f^i(p)g_{ij} \tag{4.19}
$$

とした上で[†4] $\omega = f_1 dx^1 + \cdots + f_n dx^n$ と置けば

$$
\begin{aligned}
\omega_{\gamma(t)}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{\gamma(t)}\right) &= f_j(\gamma(t)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f^i(\gamma(t))g_{ij} \\
&= g_{\gamma(t)}\left(X(\gamma(t)) \middle| \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{\gamma(t)}\right)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

このように，リーマン計量（の成分）を用いて f^j（一般には反変ベクトル）から $f_j = \sum_{i=1}^{n} g_{ij} f^i$（一般には共変ベクトル）を得ることを**添字を下げる**と言う．$G = (g_{ij})$ とすれば G は正則であるから，逆行列 $G^{-1} = (g^{ij})$ が存在する．f_j から $f^i = \sum_{i=1}^{n} g^{ij} f_i$ を得ることを**添字を上げる**と言う．

問 4.20. 添字の上げ下げは互いに逆操作であることを示せ．

ここでは $\mathbb{R}^n$ のユークリッド計量から定まるリーマン計量を考えたので g_{ij} は定数であったが，一般には g_{ij} は $\mathbb{R}^n$ 上の函数となる．この場合にも話は全く同様である．さらに，リーマン計量に限らず，例えばローレンツ計量などを考えても添字の上げ下げが定まる．

（以上）

[†4] 上の i と下の i が打ち消しあって下の j が残っていることに注意せよ．