問 3.1. $p \in \mathbb{R}^n,\ v \in T_p\mathbb{R}^n$ とする．$\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ であって，C^∞ 級であって，$\gamma(0) = p,\ D\gamma(0) = v$ が成り立つ物が存在することを示せ．
ヒント：直線を考えればよい．

問 3.2. $(x^1, \dots, x^n)$ を $\mathbb{R}^n$ の標準的な（通常の）座標とする．$f\colon T\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ を次のように定める．$v \in T\mathbb{R}^n$ とする．$p \in \mathbb{R}^n$ が一意的に存在して $v \in T_p\mathbb{R}^n$ である．$T_p\mathbb{R}^n$ は $\dfrac{\partial}{\partial x^1}_p, \dots, \dfrac{\partial}{\partial x^n}_p$ を基底とする線型空間であるから，$v^1, \dots, v^n \in \mathbb{R}$ が一意的に存在して $v = v^1\dfrac{\partial}{\partial x^1}_p + \cdots + v^n\dfrac{\partial}{\partial x^n}_p$ が成り立つ．そこで $f(v) = (p, (v^1, \dots, v^n))$ と定める．このとき，f は $T\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ への全単射であることを示せ．

注 3.3. M を一般の「多様体」（直感的には曲面などの「図形」である）とすると T_pM，但し $p \in M$，$TM = \displaystyle\bigcup_{p\in M} T_pM$ と $\dim M$ が定まり，$T_pM \cong \mathbb{R}^{\dim M}$ が成り立つ．また，TM も自然に多様体となる．このとき，TM と $M \times \mathbb{R}^{\dim M}$ の間には全単射が存在するが，一般にはこれは同相写像あるいは微分同相写像にはなり得ない．例えばメビウスの帯や，二次元球面 S^2 はこのような M の例である．一方，$M = \mathbb{R}^n$ や $M = B^n = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \|p\| < 1\}$ については TM と $M \times \mathbb{R}^n$ は問 3.2 の対応により微分同相である．詳しくは多様体に関する教科書を参照のこと．

定義 3.4. $p \in \mathbb{R}^n,\ v \in T_p\mathbb{R}^n$ とする．U を p を含む開集合とし，$f\colon U \to \mathbb{R}$ を C^1 級とする．$v = v^1\dfrac{\partial}{\partial x^1}_p + \cdots + v^n\dfrac{\partial}{\partial x^n}_p$ と表して，

$$v(f) = v^1\frac{\partial f}{\partial x^1}(p) + \cdots + v^n\frac{\partial f}{\partial x^n}(p)$$

と定め，v に関する（v による，v 方向の）f の**微分**と呼ぶ．

問 3.5. $p \in \mathbb{R}^n,\ v \in T_p\mathbb{R}^n$ とする．U を p を含む開集合とし，$f\colon U \to \mathbb{R}$ を C^1 級とする．$\epsilon > 0,\ I = (-\epsilon, \epsilon)$ とし，$\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ を $\gamma(0) = p,\ D\gamma(0) = v$ をみたす C^1 級の曲線とする．このとき，$v(f) = \dfrac{d(f\circ\gamma)}{dt}(0)$ が成り立つことを示せ．特に，$v(f)$ は γ の選び方によらない．

問 3.6. $p \in \mathbb{R}^n,\ v \in T_p\mathbb{R}^n$ とする．U を p を含む開集合とし，$f, g\colon U \to \mathbb{R}$ を C^1 級とする．

$$\begin{aligned} v(f+g) &= v(f) + v(g), \\ v(fg) &= v(f)g(p) + f(p)v(g) \end{aligned}$$

が成り立つことを示せ．

接ベクトルの座標変換の下での振る舞いは講義で述べたが，よく考えるとベクトルを写す写像は座標変換（微分同相写像）である必要はない．そこで以下のように定める．

定義 3.7. $U \subset \mathbb{R}^n,\ V \subset \mathbb{R}^m$ を開集合とし，$\varphi\colon U \to V$ を C^1 級とする（$n = m$ であるとか，φ が微分同相写像であるとかといったことは仮定しない）．また，$\mathbb{R}^n$ の座標を $(x^1, \ldots, x^n)$，$\mathbb{R}^m$ の座標を $(y^1, \ldots, y^m)$ とする．$\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{R}^m$ の座標を用いて $\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^m)$ と表す．$p \in U,\ v \in T_p\mathbb{R}^n$ について，$v = v^1 \dfrac{\partial}{\partial x^1}_p + \cdots + v^n \dfrac{\partial}{\partial x^n}_p$ と表し，

$$\begin{aligned} w^i &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}(p) v_j, \\ \varphi_{*p} v &= \sum_{i=1}^m w^i \frac{\partial}{\partial y^i}_{\varphi(p)} \end{aligned}$$

と定める．$\varphi_{*p} v \in T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^m$ である．

行列の演算を援用すれば $v = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial}{\partial x^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$ について，

$$\varphi_{*p} v = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial}{\partial y^m} \end{pmatrix} D\varphi(p) \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$$

が成り立つ．

問 3.8. $U \subset \mathbb{R}^n,\ V \subset \mathbb{R}^m$ を開集合とし，$\varphi\colon U \to V$ を C^1 級とする．また，$p \in U,\ v \in T_pU = T_p\mathbb{R}^n$ とし[†1]，$q = \varphi(p)$ と置く．最後に，$g\colon V \to \mathbb{R}$ を C^1 級とする．

1) $\varphi_{*p} v \in T_q\mathbb{R}^m$ であることを確かめよ（納得すればよい）．

[†1] U が開集合でなければ一般には $T_pU = T_p\mathbb{R}^n$ は成り立たない．くれぐれも注意すること．

2)

$$(*) \qquad (\varphi_{*p}v)(g) = v(g \circ \varphi) = v(\varphi^* g)$$

が成り立つことを示せ（$\varphi^* g = g \circ \varphi$ が成り立つことは定義である）．なお，左辺は $\varphi_{*p}v(g)$ で表すことも多い[†2]．

問 3.8 の結論 $\varphi_{*p}v(g) = v(\varphi^* g)$ は，特に φ が微分同相写像（変数変換）である場合には例えば物理的には次のように解釈できる．スカラー場が与えられたとして，その微分は慣性系（座標）の選び方には依存しないはずである．もちろん，微分を表す成分（テンソル）は慣性系に依存するが，それは慣性系の変換に従って写りあわなければいけない．物理における慣性系の選び方は，数学では座標の定め方に対応する（例えば空間が $\mathbb{R}^n$ であれば多くは直交座標（通常の座標）を選ぶが，目的に応じて極座標や，もっと一般の座標を用いる）．今の場合，U と V は φ を通じて同じと考えている[†3]．従って V 上の函数 g は U 上では $g \circ \varphi$ で与えられる．また，U を用いて表される $v \in T_pU$ は V を用いて表される $\varphi_{*p}v$ に対応する．つまり，p と $\varphi(p)$，$\varphi^* g$ と g，v と $\varphi_{*p}v$ がそれぞれ本来は「同じ」ものを表しているが，それぞれ U 上，V 上での表現である，ということである．従って「同じ」スカラー場の「同じ」ベクトルに関する微分は等しくないといけない．このことを式で表したのが $(*)$ である．実際には φ が座標変換ではなく，U から V への写像であっても式 $(*)$ は適切に意味づけができて成り立つ．

ここからは少し難しくなる．講義の範囲で言えばベクトル解析の理解には必ずしも必要ではないが，結局のところ「正体」に近いので知っておいた方がよりよく理解できる．

接ベクトルの座標変換について．

$U, V \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とし，$\varphi\colon U \to V$ を C^1 級の微分同相写像（座標変換）とする．U の座標を $(x^1, \dots, x^n)$，V の座標を $(y^1, \dots, y^n)$ とすると，$p \in U,\ q = \varphi(q) \in V$ について

$$v = v^1 \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p + \cdots + v^n \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p \in T_pU (= T_p\mathbb{R}^n)$$

と

$$w = w^1 \left.\frac{\partial}{\partial y^1}\right|_q + \cdots + w^n \left.\frac{\partial}{\partial y^n}\right|_q \in T_qV (= T_q\mathbb{R}^n),$$

[†2] 定義域をよく考えれば，括弧を付けなくとも意味の通る計算の順序が一意的に定まる．

[†3] 物理風に言えば U と V は同じ空間の別な座標系，慣性系であって，φ が変換則を与えている，ということである．

ただし
$$w^i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}(p) v^j,$$
即ち
$$(**) \qquad \begin{pmatrix} w^1 \\ \vdots \\ w^n \end{pmatrix} = D\varphi(p) \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix},$$
が対応し，このとき $w = \varphi_{*p} v$ と表すのであった．これは線型代数で扱った基底の変換を用いると次のように考えることができる．T_pU と T_pV は本来は同じ空間の接空間であるはずなので，この接空間を仮に T とする．T は n 次元実線型空間である．そこで $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}_p \right)$ と $\left(\frac{\partial}{\partial y^1}_q, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n}_q \right)$，ただし $q = \varphi(p)$，は T の順序付き基底であると考える．$u \in T$ とすると u は
$$\begin{aligned} u &= v^1 \frac{\partial}{\partial x^1}_p + \cdots + v^n \frac{\partial}{\partial x^n}_p (= v) \\ &= w^1 \frac{\partial}{\partial y^1}_q + \cdots + w^n \frac{\partial}{\partial y^n}_q (= w) \end{aligned}$$
と（一意的に）表すことができる．ところで，$\varphi_{*p} \frac{\partial}{\partial x^j}_p = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}(p) \frac{\partial}{\partial y^i}_q$ が成り立つ．行列の記法を用いれば
$$(***) \qquad \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y^1}_q & \cdots & \frac{\partial}{\partial y^n}_q \end{pmatrix} D\varphi(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1}_p & \cdots & \frac{\partial}{\partial x^n}_p \end{pmatrix}$$
が成り立つ．

問 3.9. $(***)$ が成り立つことを示せ．
ヒント：講義で述べた変換則の特別な場合である．

式 $(***)$ は，φ は T の順序付き基底 $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}_p \right)$ から $\left(\frac{\partial}{\partial y^1}_q, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n}_q \right)$ への変換（変換行列）$D\varphi(p)$ を定めると理解することができる．従って，v と w が同じベクトル（今の場合 u）を表すためには $(**)$ が成り立つことが必要十分である．

上下の添字について．

成分を用いて計算するならば

$$
\begin{aligned}
\varphi_{*p}v(g) &= \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}(p)v^j\left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_{\varphi(p)}\right)g \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}(p)v^j\frac{\partial g}{\partial y^i}(\varphi(p)), \\
v(\varphi^* g) &= \left(\sum_{j=1}^{n}v^j\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right)(g\circ\varphi) \\
&= \sum_{j=1}^{n}v^j\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial g}{\partial y^i}(\varphi(p))\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}(p)
\end{aligned}
$$

が成り立ち，等しい．上に付いている添字（例えば x^j の j）は $\dfrac{\partial}{\partial x^j}$ の用に「分母」に現れるときには下に付いていると考えると，いずれの式についても上付きの添字と下付きの添字が組になっている．これらは打ち消しあうと考えると，得られるものは上にも下にも添字が付いていないということになる．これは得られるもの（$\varphi_{*p}v(g)=v(\varphi^*g)$）がスカラー場であって，座標系の取り方によらないことに対応する．一方，本来 $u\in T$ で表されるようなベクトルがあるとして，U を用いれば u は

$$v=v^1\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p+\cdots+v^n\left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p\in T_pU(=T_p\mathbb{R}^n)$$

と表され，V を用いると u は

$$w=\varphi_{*p}v=w^1\left.\frac{\partial}{\partial y^1}\right|_q+\cdots+w^n\left.\frac{\partial}{\partial y^n}\right|_q\in T_qV(=T_q\mathbb{R}^n)$$

と表されるとする．すでに調べたように，一般には $v^i=w^i$ は成り立たない（実際には $(**)$ が成り立つ）．つまり，v や w は，v^i を w^i に，$\left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ を $\left.\dfrac{\partial}{\partial y^i}\right|_q$ に形式的に取り替えれば同じ対象 u を表すと言う意味で座標の選び方に依らない．一方，成分 v^i や w^i 自体は座標の選び方に依存する．これも v や w においては添字の上下が打ち消し合っているが，v^i や w^j そのものは上付きの添字があることに対応する．一般には上下に二つ以上の添字を持つ量（テンソル）や，上にも下にも同時に添字を持つ量も扱う．これについては追々述べる．

（以上）