２０１７年度数理科学基礎II（理I 24–27組向け，足助担当）演習問題 3 v1 2017/4/24（月）

ここでは次の定理を認める．

定理. $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を連続とする．また，$\mathbb{R}^n$ の点列 $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ は $k \to +\infty$ の時 $a \in \mathbb{R}^n$ に収束するとする．このとき，$\mathbb{R}^m$ の点列 $(f(a_k))_{k\in\mathbb{N}}$ は $k \to +\infty$ の時 $f(a) \in \mathbb{R}^m$ に収束する．

連続函数の定義は簡単には紹介したが，後日改めて扱う．定理の証明はその後で行う．連続函数の定義を既に学んだことがあるのであれば，定理の証明を考えてみよ．

問 3.1. 数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を以下のように定めるとき，$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $n \to +\infty$ において収束するか判定し，収束するのであれば収束極限を求めよ．

1) $a_n = n \in \mathbb{R}$.
2) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n} \in \mathbb{R}$，ただし $a_0 = 1$.
3) $a_n = a^n$，ただし $a > 0$.

問 3.2. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathbb{R}^m$ の点列とする．

1) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $n \to +\infty$ において $a \in \mathbb{R}^m$ に収束するとする．$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $\exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow a_n = b_n$ をみたすならば $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ も $n \to +\infty$ において a に収束することを示せ．
2) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $n \to +\infty$ においてそれぞれ $a, b \in \mathbb{R}^m$ に収束するとする．$(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を
$$c_n = \begin{cases} a_{\frac{n}{2}}, & n\text{ が偶数の時}, \\ b_{\frac{n-1}{2}}, & n\text{ が奇数の時} \end{cases}$$
とする．$(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $n \to +\infty$ において収束するのは $a = b$ の時，その時のみであることを示せ．また，収束するならば収束極限は $a (= b)$ であることを示せ．

問 3.3. 数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が与えられたとき，数列 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $b_0 = a_0$，$n > 0$ について $b_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ として定める．

1) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $n \to +\infty$ において a に収束するとする．このとき，$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $n \to +\infty$ において a に収束することを示せ．
2) $a_n = (-1)^n$ とする．このとき $n \to +\infty$ において $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は収束しないが，$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は収束することを示せ．また，収束極限を求めよ．

定義. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathbb{R}^m$ の点列とする．$a \in \mathbb{R}^m$ が $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の**集積点**であるとは，$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ のある部分列 $(a_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ が存在して $a = \lim_{j\to+\infty} a_{n_j}$ が成り立つことを言う．

問 3.4. $\mathbb{R}^m$ の点列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束することと，$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が唯一つの集積点を持つことは同値であることを示せ．

問 3.5. $a_0 = (0,0)$ とし，$n > 0$ について $a_n = \left(\dfrac{(-1)^{2n}}{2n}, \dfrac{(-1)^{3n}}{3n}\right) \in \mathbb{R}^2$ とする．$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の集積点を全て求めよ．

問 3.6. $x \in \mathbb{R}$ とする．

1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = 0$ が成り立つことを示せ．
2) $n \in \mathbb{N}$ とすると，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ が成り立つことを示せ．
3) f を x を変数とする多項式とすると $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{e^x} = 0$ が成り立つことを示せ．

定義. $M_{m,n}(\mathbb{R})$ を実数を成分とする m 行 n 列の行列全体がなす集合とする．また，$M_n(\mathbb{R}) = M_{n,n}(\mathbb{R})$ とする．$A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ について A の (i,j) 成分を a_{ij} とし，$\|A\| = \sqrt{\displaystyle\sum_{i,j} a_{ij}^2}$ と置く．また，$A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ について $d(A,B) = \|A - B\|$ と定める．$M_{m,n}(\mathbb{R})$ に値を取る点列の収束はこの $\|\cdot\|$ を用いて定める．

問 3.7. 1) $a, b \in \mathbb{R}$ とする．$M_2(\mathbb{R})$ に値を取る点列 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $A_n = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^n$ により定める．ただし $A_0 = E_2$（単位行列）と定める．$n \to +\infty$ において $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束するための a, b に関する必要十分条件を求めよ．また，収束極限を求めよ．

2*) $N \in M_n(\mathbb{R})$ を $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$ により定める（$(k, k+1)$ 成分が 1 で，その他の成分は 0 とする）．$x \in \mathbb{R}$ とするとき，

$$(*) \qquad \lim_{i\to+\infty} \sum_{m=0}^{i} \frac{1}{m!}(xE_n + N)^m \in M_n(\mathbb{R})$$

を求めよ．ここで，$0! = 1$ とし，$m! = m(m-1)!$ と帰納的に定める．また，$X \in M_n(\mathbb{R})$ について $X^0 = E_n$（単位行列）とここでは定める（このように定めないこともあるので注意を要する）．$(*)$ を単に $\displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!}(xE_n + N)^m$ で表す．

（以上）