２０１７年度微分積分学（理 I 24–27 組向け，足助担当）演習問題 22 v2　’17/11/27（月）
’17/12/3：問 22.6 に加筆.

問 22.1. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を実数列とする．$f\colon [0,+\infty)\to\mathbb{R}$ を

$$f(x)=a_n,\qquad \text{ただし } n\in\mathbb{N},\ x\in[n,n+1)$$

により定める．

1) $0\leq t\leq s\,(<+\infty)$ とすると f は $[t,s]$ 上リーマン可積分であることを示せ．また，$m,n\in\mathbb{Z}$ とするとき $\displaystyle\int_m^n f(x)dx$ を求めよ．
2) f が $[0,+\infty)$ 上広義リーマン可積分であることと，$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ が収束することは同値であることを示せ．
ヒント：定義により $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n=\lim_{m\to+\infty}\sum_{n=0}^{m}a_n$ が成り立つ．また，$0\leq t\leq s$ とするとき，k,l をそれぞれ t,s を近似する整数（近似する方法は幾つかある）として $\displaystyle\int_t^s f(x)dx$ と $\displaystyle\sum_{n=k}^{l}a_n$ を比較してみよ．一般には誤差が生じるので，それを評価する必要がある．
3) 2) の同値な条件が成り立つとする．$\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)dx$ が絶対収束することと，$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ が絶対収束することは同値であることを示せ．また，$\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)dx$ が条件収束することと，$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ が条件収束することは同値であることを示せ．
ヒント：前半は 2) を $|f|$ と $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ に適用すれば良い．後半は前半をうまく使えばほとんど何もせずに示せる．

問 22.2. $(a_t)_{t\in\mathbb{R}}$ を $t\in\mathbb{R}$ を添字とする実数列とする（$t\mapsto a_t$ を函数とする，としても同じことである）．

1) 条件
   a) $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}a_t$ が存在する．
   b) $\forall\epsilon>0,\ \exists M\in\mathbb{R},\ (t,s>M\Rightarrow|a_t-a_s|<\epsilon$ が成り立つ．

は同値であることを示せ．

ヒント：b) が成り立つとすると，$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ はコーシー列であるから収束する．収束極限を a とするとき，$|a_t - a|$ を考えてみよ．

2) 条件

a) $\lim_{t\to b-0} a_t$ が存在する．

b) $\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ b-\delta < t \le s < b \Rightarrow |a_t - a_s| < \epsilon$ が成り立つ．

は同値であることを示せ．

ヒント：例えば $(a_{b-\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ を考えてみよ．

問 22.3. $D(R) \subset \mathbb{R}^2$ を $D(R) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \le R\}$ により定め，

$$S(R) = \int_{D(R)} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

と置く．

1) $\lim_{R\to+\infty} S(R)$ が存在することを示せ．

2) $\lim_{R\to+\infty} S(R)$ を求めよ．この値を $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$ と定める．つまり，

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \lim_{R\to+\infty} \int_{D(R)} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

と定める．

3) $\lim_{r\to+\infty} \int_0^r e^{-x^2} dx$ が存在することを示せ．この値を $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ と定める．

4) $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2$ が成り立つことを示せ．また，$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ を求めよ．

ヒント：$W_n = (-n,n)^2$，$U_m = D(m)$ として，W_n と D_m の包含関係を考えてみよ．その上で，$\int_{\overline{W_n}} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$ および $\int_{\overline{D_m}} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$ を比較し，$n, m \to +\infty$ における極限がどのようになるか調べよ．

函数 $x \mapsto e^{-x^2}$ あるいはその積分は正規分布（ガウス分布）と関連が深い．これらは確率や統計において重要であるが，それに限らず，幾何などでも重要である．

問 22.4. $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$ と置く．$\Gamma\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ を

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

により定める．$\mathit{\Gamma}$ を**ガンマ函数**と呼ぶ．また，$B\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ を

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

により定める．B を**ベータ函数**と呼ぶ[†1]．

1) $\mathit{\Gamma}(x)$ を定める積分は絶対収束することを示せ．
2) ガンマ函数は次の等式（函数等式）をみたすことを示せ．ただし $x > 0$ とする．
   i) $\mathit{\Gamma}(x+1) = x\mathit{\Gamma}(x)$．
   ii) $\mathit{\Gamma}(1) = 1$．一般に $n \in \mathbb{N}$，$n > 0$ ならば $\mathit{\Gamma}(n) = (n-1)!$．
   iii) $\mathit{\Gamma}(x) > 0$．
   iv) $\mathit{\Gamma}(x) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^{2x-1} dr$．
3) $B(x,y)$ を定める積分は絶対収束することを示せ．
4) $B(x,y) = B(y,x) = 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{2x-1}\theta)(\cos^{2y-1}\theta)d\theta$ が成り立つことを示せ．
5) $B(x,y) = \dfrac{\mathit{\Gamma}(x)\mathit{\Gamma}(y)}{\mathit{\Gamma}(x+y)}$ が成り立つことを示せ．
   ヒント：二変数の広義積分と考えて座標変換するのが見やすい．

問 22.5 (微分積分学，難波誠著，裳華房から改題の上引用)．$W = (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$ と置く．また，$n \in \mathbb{N}$, $n > 3$ について $W_n = \left(\dfrac{2}{n}, 1 - \dfrac{1}{n}\right) \times \left(\dfrac{1}{n}, 1 - \dfrac{1}{n}\right)$，$U_n = \left(\dfrac{1}{n}, 1 - \dfrac{1}{n}\right) \times \left(\dfrac{2}{n}, 1 - \dfrac{1}{n}\right)$ と置く．

1) $\overline{W_n} \subset W_{n+1}$, $\overline{U_n} \subset U_{n+1}$ および $W = \displaystyle\bigcup_{n=4}^{+\infty} W_n = \bigcup_{n=4}^{+\infty} U_n$ が成り立つことを示せ．
2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{\overline{W_n}} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dxdy$ と $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{\overline{U_n}} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dxdy$ は共に存在するが異なることを示せ．
3) $\displaystyle\int_W \left| \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \right| dxdy$ は収束しないことを示せ．従って 2) の積分はどちらも絶対収束していない．

この例は一変数の場合と異なり，多変数（二変数以上）の広義積分は素朴に考えるとうまくいかないことを意味している．実際には絶対収束する広義積分以外のものを考えて（つまり，

[†1] ここでの B はギリシア文字（のつもり）である．通常はラテン文字と（ほぼ）同じ形であるようなギリシア文字（例えばアルファ A やゼータ Z）は用いないが，このように例外的に用いることもある．ちなみにアルファ函数というのもあって，$A_n(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-xt} t^n dt$（$n = 1, 2, \ldots$）で定義される．

条件収束にあたるものを考えて）一般的な議論をしようとすると，何かしら破綻が生じる．一方，特定の函数（あるいは函数族）に関する，絶対収束しない積分もしばしば意味をもつので注意が必要である．

問 22.6 **. $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ とする．(x,y) におけるベクトル（例えば (x,y) を通る C^1 級の曲線の接ベクトルが念頭にある）(v,w) について[†2]，その長さ $\|(v,w)\|_{(x,y)}$ を

$$\|(v,w)\|_{(x,y)} = \frac{2}{1+x^2+y^2}\sqrt{v^2+w^2}$$

により定める（もし前半の $\dfrac{2}{1+x^2+y^2}$ が無ければ（1 に置き換えれば）(v,w) の通常の長さである．今はそうではなく，よくわからない補正項がついている）．

1) $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ を固定する．すると $\|\cdot\|$ は（線型空間）$\mathbb{R}^2$ のノルムを定めることを示せ．もしユークリッド計量（内積）は知っているが，ノルムは知らない場合には

$$g((v_1,w_1),(v_2,w_2))_{(x,y)} = \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2}(v_1v_2+w_1w_2)$$

と置くと，$g(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_{(x,y)}$ は $\mathbb{R}^2$ のユークリッド計量（内積）を定めることを示せ．

2) $l\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ が C^1 級の（正則とは限らない）曲線であるとき，l の $l(0)$ から $l(s)$ までの長さ（$s \in [0,1]$）$L(s)$ を

$$L(s) = \int_0^s \|Dl(t)\|_{l(t)}\, dt$$

により定める（$\|\cdot\|$ は上で定めたものであることに注意）．

さて，$l_1, l_2\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ を $l_1(t) = \left(\cos\dfrac{\pi}{4}t, \sin\dfrac{\pi}{4}t\right)$，$l_2(t) = (1-t,t)$ により定める．l_1 の $l_1(0)$ から $l_1(1)$ までの長さを L_1，l_2 の $l_2(0)$ から $l_2(1)$ までの長さを L_2 とすると $L_1 < L_2$ が成り立つことを示せ[†3]．

ここで，$S^2 = \{(t,s,u) \in \mathbb{R}^3 \mid t^2+s^2+u^2=1\}$ とし，$f\colon S^2 \setminus \{(0,0,1)\} \to \mathbb{R}^2$ を

$$f(t,s,u) = \left(\frac{t}{1-u}, \frac{s}{1-u}\right)$$

[†2] とりあえず $(v,w) \in \mathbb{R}^2$ と考えていればよいが，実際には (v,w) は (x,y) におけるベクトルなので，例えば $(1,0)$ を $p=(0,0) \in \mathbb{R}^2$ におけるベクトルと考えるときと，$q=(10,10) \in \mathbb{R}^2$ におけるベクトルとそれぞれ考えるときには区別するべきである．その意味で，$p \in \mathbb{R}^2$ におけるベクトル全体の成す線型空間を $T_p\mathbb{R}^2$ で表す．線型空間としては $T_p\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$ である．このような考え方はベクトル場を考えるときなどに重要である．

[†3] 実際には $(1,0)$ と $(0,1)$ の $\|\cdot\|$ に関する距離 d を $d = \inf_l \int_0^1 \|Dl(t)\|_{l(t)}\, dt$，ただし l は $(1,0)$ と $(0,1)$ を結ぶ，(区分的に）C^1 級の曲線全体を走る，により定めると $d = L_1$ であることが示せる．既に扱った道具ばかりで示せるが，現時点では難しい．

により定める．

3) f がどのような写像であるか，図を用いて説明せよ．
4) f は全単射であることを示せ（$S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ から $\mathbb{R}^2$ への写像が C^∞ 級であることの定義を適切にすれば，f は微分同相写像である）．また，逆写像を求めよ（逆写像は $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^3(\supset S^2 \setminus \{(0,0,1)\})$ への写像と考えると表しやすい）．
5) f の逆写像を g とする．ここで，g は $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^3$ への写像として表しておく．また，$\mathbb{R}^3$ の標準的なノルムを $\|\cdot\|''$ で表す．$(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ であれば $\|(a_1, a_2, a_3)\|'' = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}$ である．さて，$(x, y) \in \mathbb{R}^2$，$(v, w) \in \mathbb{R}^2$ について
$$\|(v,w)\|'_{(x,y)} = \left\| Dg(x,y) \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \right\|''$$
と置く（ベクトル (v, w) を左辺では行ベクトル，右辺では列ベクトルで表しているので注意[†4]）．すると $\|(v,w)\|'_{(x,y)} = \|(v,w)\|_{(x,y)}$ が成り立つことを示せ（右辺は最初に定めた $\|\cdot\|$ である）．詳しくは述べないが，これは $\|\cdot\|$ が，球面上の標準的な長さ（ノルム）を平面に写して得られたものであることを意味する．

（以上）

[†4]悪い記法であるが右辺は行列の積なのであきらめる．読みやすさとの兼ね合いもあるが，本来はこのような記法は避けるべきである．もし避けがたければ本文のように明示すべきである．そうでなければ何が書いてあるのか読者にはわからない．