２０１７年度微分積分学（理 I 24–27 組向け，足助担当）演習問題 １２ v1 2017/7/3（月）

行列のノルムについて簡単に復習しておく．

定義 12.1. $A=(a_{ij})\in M_{m,n}(\mathbb{C})$ について $\|A\|=\sqrt{\sum_{i,j}|a_{ij}|^2}$ と置き，A の**ノルム**と呼ぶ．より細かくは，2-ノルム，標準的なノルム，などと呼ぶ．

次が成り立つのであった．

補題 12.2. $A\in M_{m,n}(\mathbb{C}),\ B\in M_{n,l}(\mathbb{C})$ について $\|AB\|\leq\|A\|\,\|B\|$ が成り立つ．

実行列については既に述べたが，複素行列についても同様に成り立つ．証明はほとんど同一であるが，ユークリッド計量の代わりにエルミート計量を用いる．興味があれば示してみるとよいが，とりあえず認めてしまって良い．

ここからが本題である．

問 12.3. $m\in\mathbb{N}$ について $s_m(x)=\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{n!}x^n$ と定める．$a<b\in\mathbb{R}$ とすると，$(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ は $[a,b]$ 上一様に絶対収束することを示せ．

注. 一般に，$\mathbb{R}$ 上の函数列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が，任意の閉区間 $[a,b]$ 上一様収束することを $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は**広義一様収束**あるいは**コンパクト一様収束**すると言う．

問 12.4 ****.** $\mathbb{R}$ 上の函数列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ はコンパクト一様収束すると仮定する．$a<b$ を固定すると $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $[a,b]$ 上の函数に一様収束するから，収束極限を $f_{a,b}$ とする．

1) $c\leq a<b\leq d$ とすると，$f_{c,d}|_{[a,b]}=f_{a,b}$ が成り立つことを示せ．

2) $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を，$a\leq x\leq b$ なる $a<b$ を選んで

$$f(x)=f_{a,b}(x)$$

とすると，f は a,b の選び方に依らずに定まることを示せ．

3) 各 f_n が連続ならば f は連続であることを示せ．

問 12.5. $A\in M_n(\mathbb{C})$ とし，

$$\exp A=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{m!}A^m=\lim_{l\to+\infty}\sum_{m=0}^{l}\frac{1}{m!}A^m$$

と置く．

1) $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{C})$ とすると，$|a_{ij}|\leq\|A\|$ が成り立つことを示せ．

2) $\dfrac{1}{m!}A^m$ の (i,j)-成分を $b_{ij}(l)$ とし，$s_{ij}(l)=\displaystyle\sum_{k=0}^{l} b_{ij}(l)$ とする．$(s_{ij}(l))_{l\in\mathbb{N}}$ はコーシー列であることを示せ．したがって $(s_{ij}(l))_{l\in\mathbb{N}}$ は $l\to+\infty$ のとき収束するので，収束極限を x_{ij} とすれば，$\exp A=(x_{ij})$ が成り立つ．

3) 級数 $(s_{ij}(l))_{l\in\mathbb{N}}$ の収束は絶対収束であることを示せ．即ち，$S_{ij}(l)=\displaystyle\sum_{k=0}^{l}|b_{ij}(l)|$ とすると $(S_{ij}(l))_{l\in\mathbb{N}}$ は収束することを示せ．

ヒント：$C=(|a_{ij}|)_{i,j})\in M_n(\mathbb{R})$ とする．2) によって $\exp C$ の各成分は収束している．$\dfrac{1}{m!}C^m$ と $\dfrac{1}{m!}A^m$ の (i,j)-成分を比較してみよ．

4) $R>0$ を固定し，$\mathscr{M}_R=\{A\in M_n(\mathbb{C})\mid \|A\|\le R\}$ とする．級数 $(s_{ij}(l))_{l\in\mathbb{N}}$ の収束は次の意味で $\mathscr{M}_R$ 上で一様であることを示せ，即ち，

$$\forall\epsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ A\in\mathscr{M}_R,\ n\ge N\Rightarrow |s_{ij}(l)-x_{ij}|<\epsilon$$

が成り立つ．また，$(S_{ij}(l))_{l\in\mathbb{N}}$ の収束極限を y_{ij} とすると，

$$\forall\epsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ A\in\mathscr{M}_R,\ n\ge N\Rightarrow |S_{ij}(l)-y_{ij}|<\epsilon$$

が成り立つことを示せ．この意味で，級数 $(s_{ij}(l))_{l\in\mathbb{N}}$ は $\mathscr{M}_R$ 上で一様に絶対収束する．

ヒント：後半の証明は 3) と同様にできる．問題は前半である．$s_{ij}(l)$ や $S_{ij}(l)$ は A に依存することに注意せよ．

問 12.6. $f,g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ とする．

1) $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ $g(x)=x$ とする．f は $x=0$ で微分可能であることを示せ．また，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f}{g}(x)$ は存在するが $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{Df}{Dg}(x)$ は存在しないことを示せ（収束しないことはきちんと収束の定義に基づいて示すこと）．

2) $f(x)=\sin x,\ g(x)=x$ とする．$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f}{g}(x)$ は存在するが $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{Df}{Dg}(x)$ は存在しないことを示せ（収束しないことはきちんと収束の定義に基づいて示すこと）．

（以上）