２０１５年度微分積分学（理 I 32〜35 組向け，足助担当）　演習問題 １５　2015/11/16（月）
’15/11/16：定義 15.8 の次の注，問 15.9 と定義 15.13 の後のコメントについて，細かい文言を加筆修正．

今回からは，講義・演習とはやや独立にフーリエ展開について扱う．突っ込んだ話はまだできないので，やや大雑把な話をする．全体的として以下のような特徴がある．技術的には講義で扱った事柄の範疇に含まれるが，線型代数で（主に有限次元線型空間の場合に）扱ってきたことが話（理論）を構成する基礎的な道具として用いられる．

定義 15.1. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とする．$T > 0$ が存在して $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$ が成り立つとき，f は**周期的**である，あるいは f は**周期函数**であると言う．また，このような T の最小値が存在して正の値であるとき，その値を f の**周期**と呼ぶ．

定数函数は周期的とは言わないこともある．いずれにせよ，定数函数の周期は（正の値の範囲では存在しないので）考えないか，特別に定める．

フーリエ展開とは，周期函数を三角函数の（無限）和に展開することである．しばらく準備をする．

問 15.2. 連続な周期函数は一様連続であることを示せ．
ヒント：考えている函数を f とする．I を有界閉区間とすると f は I 上では一様連続である．f が周期的であることを用いると，I を十分大きく取れば，f の連続性を I 上で一様に示すことができる．

問 15.3. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続とし，定数ではないとする．また，f は周期的であるとする．

1) f には周期が存在することを示せ．
2) f の周期を T_0 とすると，$T < T_0$ ならば $f(x+T) - f(x)$ は恒等的には 0 ではないことを示せ．

ヒント：T_0 を周期の下限として T_0 について調べてみよ．方法によっては 1) と 2) は同時に示せる．

問 15.4 (問 11.2). $T_0 > 0$ とし，$\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$ と置く．$m, n \in \mathbb{N}$ とすると，以下が成り立つことを示せ.

$$\frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} \cos(n\omega_0 t)\cos(m\omega_0 t)dt = \begin{cases} 1, & m = n \neq 0, \\ 2, & m = n = 0, \\ 0, & m \neq n, \end{cases}$$

$$\frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} \sin(n\omega_0 t)\sin(m\omega_0 t)dt = \begin{cases} 1, & m = n \neq 0, \\ 0, & m = n = 0, \\ 0, & m \neq n, \end{cases}$$

$$\frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} \sin(n\omega_0 t)\cos(m\omega_0 t)dt = 0.$$

以下では T_0（と，従って ω_0）を固定する．また，ここでは次のように定める.

定義 15.5.

$$F_{T_0}(\mathbb{R}) = \left\{ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ は } [0, T_0] \text{ 上で（リーマン）可積分であって,} \\ \text{かつ, } \forall t \in \mathbb{R},\ f(t + T_0) = f(t) \text{ が成り立つ} \end{array} \right\}$$

と置く.

$f \in F_{T_0}(\mathbb{R})$ ならば f は周期的である．ただし，例えば f が定数函数であったり，$f\left(t + \dfrac{T_0}{2}\right) = f(t)$ が成り立ったりすることも有り得るので，f の周期が T_0 であるとは限らない．また，$F_{T_0}(\mathbb{R})$ というのは一般的な記号ではない.

問 15.6. $f \in F_{T_0}(\mathbb{R})$ ならば，f は任意の有界閉区間上で可積分であることを示せ.

注. f が有界閉区間 I 上で可積分であれば，$|f|$ もそうであった．つまり，$\displaystyle\int_I |f(x)|\,dx < +\infty$ が成り立つ.

定義 15.7. $f \in F_{T_0}(\mathbb{R})$ について，

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, T_0]} \|f(t)\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\|,$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} |f(t)|^2\,dt}$$

と置き，それぞれ **sup-ノルム**，**2-ノルム**あるいは **L^2-ノルム**と呼ぶ．2-ノルムは単に**ノルム**とも呼び，$\|f\|_2$ を $\|f\|$ でも表す.

定義 15.8.

$$L^2_{T_0}(\mathbb{R}) = \{f \in F_{T_0}(\mathbb{R}) \mid \|f\| < +\infty\},$$

$$C_{T_0}(\mathbb{R}) = \{f \in F_{T_0}(\mathbb{R}) \mid f \text{ は連続}\}$$

と置く.

L^2, C というのは一般的な記号である．周期（の最小値）や定義域，今の場合は T_0 や $\mathbb{R}$ を明示するのも一般的であるが，その方法はいくつかある．

注. 通常は $F_{T_0}(\mathbb{R})$ の定義で「リーマン可積分」としたところは「ルベーグ可測」[†1] とし，全体として積分はルベーグ積分を考える．このプリントの範囲では，リーマン積分可能な函数についてはルベーグ積分を考えても積分は変わらない．特に，リーマン積分可能（特に連続）な函数は全てルベーグ積分可能である．今のところは「講義で扱ったよりも多くの函数が積分できる便利な話があるので，通常はそれを用いる」位に考えておけば良い．

問 15.9. $F_{T_0}(\mathbb{R}),\ L^2_{T_0}(\mathbb{R}),\ C_{T_0}(\mathbb{R})$ は，函数の和と実数倍によりそれぞれ実線型空間であることを示せ．また，$C_{T_0}(\mathbb{R}) \subset L^2_{T_0}(\mathbb{R}) \subset F_{T_0}(\mathbb{R})$ が成り立ち，それぞれ部分線型空間であることを示せ．

以下，しばらく（補題 15.15 まで）ノルムと内積について述べる．

定義. V を実線型空間（$\mathbb{R}$-線型空間）とする（例えば $F_{T_0}(\mathbb{R})$ はそうである）．$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ が V 上の（あるいは V の）**ノルム**であるとは，次が成り立つことを言う．

1) $\forall v \in V,\ \|v\| \geq 0$，かつ，等号が成り立つのは $v = o$ の時に限る．ここで o は V の零ベクトルを表す（$V = F_{T_0}(\mathbb{R})$ ならば o は定数函数 0 である)）．
2) $\forall v, v' \in V,\ \|v + v'\| \leq \|v\| + \|v'\|$（三角不等式）が成り立つ．
3) $\forall v \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|\lambda v\| = |\lambda|\,\|v\|$ が成り立つ．

ノルムはベクトルの長さの一般化である．

問 15.10. $F_{T_0}(\mathbb{R})$ 上の sup-ノルム，2-ノルムは上の意味でのノルムであることを示せ．

定義. $f, g \in F_{T_0}(\mathbb{R})$ について，

$$\langle f \mid g \rangle = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t)g(t)dt$$

と置いて，**f と g の（L^2-）内積**と呼ぶ．また，$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ を $F_{T_0}(\mathbb{R})$ 上の **（L^2-）内積**と呼ぶ．

問 15.11. $F_{T_0}(\mathbb{R})$ のノルム（2-ノルム）は $F_{T_0}(\mathbb{R})$ 上の L^2-内積により定まることを示せ．

定義. $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ を V 上の内積とする．函数の族 $\{h_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$，ただし Λ は添字集合，が **$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ に関する正規直交系**であるとは

$$\langle h_\lambda \mid h_\mu \rangle = \begin{cases} 1, & \lambda = \mu, \\ 0, & \lambda \neq \mu \end{cases}$$

が成り立つことを言う．考えている内積が明らかなときには単に正規直交系と呼ぶ．

[†1] ルベーグ「可積分」ではない．函数 f がルベーグ可測，というのは f がルベーグ積分を考えて良い函数である，ということであって,「可積分」というのは（それなりにごにょごにょと定義する）f のルベーグ積分が有限の値を取る，ということである．ここでは「ルベーグ積分はリーマン積分よりも積分できる函数が多いので，積分を考えるときに少し手続きが要る（乱暴にいきなり積分を始めることができない)」と考えておけば良い．

なお，念頭にあるのは $V = F_{T_0}(\mathbb{R})$，内積は L^2-内積であって $\Lambda = \mathbb{N}$ の場合である．

正規直交系は，次の意味で「余計な」V の元を含まない．

補題 15.12. $\{h_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が $(V, \langle\cdot \mid \cdot\rangle)$ の正規直交系であるならば，$\{h_\lambda\}$ は線型独立（一次独立）である．

補題 15.12 は無限個の（有限個でない）元が線型独立であるとはどういうことか定めてしまえば有限次元の場合と全く同様に示せる．

定義 15.13. $\{h_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset V$ が**線型独立（一次独立）**であるとは，任意の**有限**部分集合 $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\} \subset \Lambda$ について，$a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}$, $a_1 h_{\lambda_1} + a_2 h_{\lambda_2} + \cdots + a_r h_{\lambda_r} = o \Rightarrow a_1 = \cdots = a_r = 0$ が成り立つことを言う．

定義 15.13 において o は V の零ベクトルである．もし $V = F_{T_0}(\mathbb{R})$, $V = L^2_{T_0}(\mathbb{R})$ あるいは $V = C_{T_0}(\mathbb{R})$ ならば o は定数函数 0 である．また，もし Λ が有限集合ならば，定義 15.13 は「線型代数学」で扱っている有限次元線型空間の場合の定義と一致する[†2]．

<u>補題 15.12 の証明</u>. $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\} \subset \Lambda$ とし，$a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}$ について $a_1 h_{\lambda_1} + a_2 h_{\lambda_2} + \cdots + a_r h_{\lambda_r} = o$ が成り立つとする．$\{h_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が正規直交系であることから

$$
\begin{aligned}
0 &= \langle h_{\lambda_k} \mid o\rangle \\
&= \langle h_{\lambda_k} \mid a_1 h_{\lambda_1} + \cdots + a_r h_{\lambda_r}\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{r} \langle h_{\lambda_k} \mid a_i h_{\lambda_i}\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{r} a_i \langle h_{\lambda_k} \mid h_{\lambda_i}\rangle \\
&= a_k
\end{aligned}
$$

が成り立つ． $\square$

以下では線型空間 V として $F_{T_0}(\mathbb{R})$ を考える．

定義 15.14. $n \in \mathbb{N}$ について，$f_n, g_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を以下のように定める．

$$
\begin{aligned}
f_n &= \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}}, & n = 0, \\ \cos(n\omega_0 t), & n > 0, \end{cases} \\
g_n &= \sin(n\omega_0 t).
\end{aligned}
$$

[†2] $\mathbb{R}^n$ や $\mathbb{C}^n$ は無限集合なのに，線型独立性は有限個の元についてしか定義しないことについて，違和感を感じた者もあると思う．当然である．定義 15.13 のように定義すると，$\mathbb{R}^n$（$\mathbb{C}^n$ でもよい）の，元（からなる族）$\{h_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が線型独立ならば，Λ は有限集合であることが示せる．なので,「線型代数学」では初めから Λ は有限集合として話を進めている．

ただし，$g_0 = 0$ なので以下では考えない．

すると，問 15.4 の結果は次のように書き換えられる．

補題 15.15. $F_{T_0}(\mathbb{R})$ において L^2-内積を考えると，$\{f_0, f_1, \ldots, g_1, g_2, \ldots\}$ は正規直交系である．

まだ先は長いので今回はここまで．

（以上）