２０１５年度微分積分学（理 I 32〜35 組向け，足助担当）　演習問題 １３　2015/11/2（月）

問 13.1. ディリクレ積分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ を求める．ここで，正確には被積分函数は

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x>0,\\ 1, & x=0\end{cases}$$

として，積分は $[0,+\infty)$ 上で考えている．

1) $\dfrac{\sin x}{x}$ の定義域は $(0,+\infty)$ であると考え，広義積分 $\displaystyle\int_{0-0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ を考えても，ディリクレ積分と値は同じであることを示せ．
2) $g\colon[0,\pi]\to\mathbb{R}$ を $g(t)=\begin{cases}\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ により定める．g は連続であることを示せ．
3) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{(2n+1)}{2}\pi}\frac{\sin x}{x}dx$ が成り立つことを示せ．
4) リーマン・ルベーグの定理（問 12.8）を用いて $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{1}{2}t}dt$ が成り立つことを示せ．
5) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{1}{2}t}dt$ と $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{1}{2}t}dt$ を求めよ．

問 13.2. $\mathbb{R}^+=\{x\in\mathbb{R}\mid x>0\}$ と置く．$\varGamma\colon\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ を

$$\varGamma(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{x-1}dt$$

により定める．$\varGamma$ を**ガンマ函数**と呼ぶ．また，$B\colon\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$（ここで，$\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+=\{(x,y)\mid x\in\mathbb{R}^+,\ y\in\mathbb{R}^+\}$ である．）を

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

により定める．B を**ベータ函数**と呼ぶ[†1]．

1) $\varGamma(x)$ を定める積分は絶対収束することを示せ．
2) ガンマ函数は次の等式（函数等式）をみたすことを示せ．ただし $x>0$ とする．
   i) $\varGamma(x+1)=x\varGamma(x)$.
   ii) $\varGamma(1)=1$．一般に $n\in\mathbb{N}$，$n>0$ ならば $\varGamma(n)=(n-1)!$.
   iii) $\varGamma(x)>0$.

[†1] ここでの B はギリシア文字（のつもり）である．通常はラテン文字と（ほぼ）同形であるような文字（例えばアルファ A やゼータ Z）は用いないが，このように例外的に用いることもある．ちなみにアルファ函数というのもあって，$A_n(x)=\displaystyle\int_1^{+\infty}e^{-xt}t^n dt$（$n=1,2,\ldots$）で定義される．

iv) $\Gamma(x) = 2\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^{2x-1} dr$.

3) $B(x,y)$ を定める積分は絶対収束することを示せ.

4) $B(x,y) = B(y,x) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}\theta \cos^{2y-1}\theta d\theta$ が成り立つことを示せ.

5) $B(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ が成り立つことを示せ.
ヒント：二変数の広義積分と考えて座標変換するのが見やすい.

問 13.3 (微分積分学，難波誠著，裳華房から改題の上引用).
$W = (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$ と置く．また，$n \in \mathbb{N},\ n > 3$ について

$$W_n = \left(\frac{2}{n}, 1-\frac{1}{n}\right) \times \left(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right),$$
$$U_n = \left(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right) \times \left(\frac{2}{n}, 1-\frac{1}{n}\right)$$

と置く.

1) $\overline{W_n} \subset W_{n+1},\ \overline{U_n} \subset U_{n+1}$ および $W = \bigcup_{n=4}^{+\infty} W_n = \bigcup_{n=4}^{+\infty} U_n$ が成り立つことを示せ．必要ならば（一般的な定義があって，それに従うと）

$$\overline{W_n} = \left[\frac{2}{n}, 1-\frac{1}{n}\right] \times \left[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right],$$
$$\overline{U_n} = \left[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right] \times \left[\frac{2}{n}, 1-\frac{1}{n}\right]$$

が成り立つことを用いよ.

2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{\overline{W_n}} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dxdy$ と $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{\overline{U_n}} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dxdy$ は共に存在するが異なることを示せ.

3) $\displaystyle\int_W \left|\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right| dxdy$ は収束しないことを示せ．従って 2) の積分はどちらも絶対収束していない.

この例は一変数の場合と異なり，多変数（二変数以上）の広義積分は素朴に考えるとうまくいかないことを意味している．実際には絶対収束する広義積分以外のものを考えて（つまり，条件収束にあたるものを考えて）一般的な議論をしようとすると，何かしら破綻が生じる．一方，特定の函数（あるいは函数族）に関する，絶対収束しない積分もしばしば意味をもつので注意が必要である.

定義 13.4. $U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とし，$n \in \mathbb{N}$ について $f_n\colon U \to \mathbb{R}$ とする.

1) $\{f_n\}$ が $f\colon U \to \mathbb{R}$ に U 上**各点収束**するとは,

$$\forall\, x \in U,\ \forall \epsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ (n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \epsilon)$$

が成り立つことを言う．

2) $\{f_n\}$ が $f\colon U \to \mathbb{R}$ に U 上**一様収束**するとは，

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ (n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow \forall x \in U,\ |f(x) - f_n(x)| < \epsilon)$$

が成り立つことを言う．

3) $\{f_n\}$ が $f\colon U \to \mathbb{R}$ に U 上**広義一様収束**あるいは**コンパクト一様収束**するとは，$K \subset U$ をコンパクト集合（有界閉集合）とすると，K 上 $\{f_n\}$ が f に一様収束することを言う．即ち，$K \subset U$ をコンパクト集合とすると

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ (n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow \forall x \in K,\ |f(x) - f_n(x)| < \epsilon)$$

が成り立つことを言う．

一様収束や広義一様収束は級数などの，函数列の極限を考える際に良く現れる．

問 13.5. 定義 13.4 の記号をそのまま用いる．

1) $\{f_n\}$ が $f\colon U \to \mathbb{R}$ に U 上一様収束することと，

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ (n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow \sup_{x \in U} |f(x) - f_n(x)| < \epsilon)$$

が成り立つことは同値であることを示せ．

2) $U = \mathbb{R}$ とする．また，各 f_n は連続であるとする．$\{f_n\}$ が f に一様収束するならば，f は連続であることを示せ．

3) $U = \mathbb{R}$ とする．また，各 f_n は連続であるとする．$\{f_n\}$ が f に広義一様収束するならば，f は連続であることを示せ．

4) $U = \mathbb{R}$ とする．$\{f_n\}$ が f に広義一様収束するが，一様収束しないような例を挙げよ．

5) $U = \mathbb{R}$ とする．また，各 f_n は C^∞ 級であるとする．$\{f_n\}$ が f に広義一様収束するが，f は $\mathbb{R}$ 上では微分不可能であるような例を挙げよ．

問 13.6. 1) $x \in \mathbb{R}$ について $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \lim_{m \to +\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!}$ と定める．f は広義一様収束することを示せ．

2) $A \in M_n(\mathbb{R})$ とし，$x \in \mathbb{R}$ について $f_m(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{A^k x^k}{k!}$ と定める．$f_m(x) \in M_n(\mathbb{R})$ である．$m \to +\infty$ のとき，f_m の各成分は（x に関して）広義一様収束することを示せ．極限を，実数値函数と同様に $\exp(Ax) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n x^n}{n!}$ と表す．

ヒント：問 1.1 を用いると，収束に関する議論は実数値函数の場合（1) の場合）に帰着できる．なお，問 2.7 はほぼ同じであるが，もう少し難しい．

ここから先は「留数（residue）」について学んでから分かれば十分である[†2]．ただ，電磁気などを扱う際には当たり前のように現れるので，心構えはあるに越したことはない．以下では「正則函数」「複素線積分」が必要となるが，ここでは敢えて定義は示さない．例えば「複素解析」，L.V. アールフォルス著，笠原乾吉訳,「複素函数論」，H. カルタン著，高橋礼司訳などで調べると良い（もちろん原著が読めるのであればその方が良い）．なお，以下では敢えて普段よりも荒っぽい（必ずしも行儀の良くない）書き方をしている．

問 13.7***.** S^1 を $\mathbb{C}$ 内の単位円周とする．S^1 に正の向きを入れると $\displaystyle\int_{S^1}\frac{dz}{z} = 2\pi\sqrt{-1}$ が成り立つことを示せ．

問 13.8***.** 複素数を変数とする函数 $f(z) = \dfrac{e^{\sqrt{-1}z}}{z}$ を考える．f は $z = 0$ 以外では正則（複素解析的）な函数であって，$z = 0$ は一位の極（pole）である．$\delta, R_1, R_2 > 0$, $0 < \delta < \min\{R_1, R_2\}$ とし，γ_{δ,R_1,R_2} を次のような積分路とする．まず $R_1, R_1 + \sqrt{-1}R_2, -R_1 + \sqrt{-1}R_2, -R_1$ を頂点とする長方形を考え，反時計回りの向きを入れる．この長方形から $-\delta$ と δ を結ぶ線分を取り去り，代わりに，原点を中心とする半径 δ の円周の下半分を考えてこれをつなぐ．向きは全体として反時計回りになるように自然に入れ，これを γ_{δ,R_1,R_2} とする．

1) $\displaystyle\lim_{\substack{\delta\searrow 0\\ R_1\to+\infty\\ R_2\to+\infty}}\int_{\gamma_{\delta,R_1,R_2}} f(z)dz$ を求めよ．いかにも極限は簡単に取れるように書いてあるが，重極限（三重極限）なのでどのように取るか考える必要が（どのように取ってもよいことを示す必要が）ある．
2) 積分路 γ_{δ,R_1,R_2} は自然に六分割される．それぞれの部分での積分の極限での振る舞いについて考察して $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ を求めよ（ここでは 1) の積分のうち虚部しか必要にならないが，実部にもきちんと意味をつけることができる（Cauchy の主値））．

問 13.9****.** 1) f を $z \in \mathbb{C}$ に関する n 次多項式とする（$n > 0$）．γ を原点を中心とする半径 $R > 0$ に沿って正の向きに回る積分路とする．R が十分大きければ γ 上 $f(z) \neq 0$ であって，$\displaystyle\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = n$ が成り立つことを示せ．

2) 代数学の基本定理を示せ．必要であれば Rouché の定理を用いよ．

（以上）

[†2] すぐに解ければ（一変数複素解析的函数の）留数についてある程度理解できていると考えて良い