２０１５年度微分積分学（理Ｉ 32〜35 組向け，足助担当）　演習問題 １２　2015/10/26（月）

問 12.1 (杉浦光夫「解析演習」より一部改題). $\mathbb{R}^2$ の部分集合 D を

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists t, s \in \mathbb{R},\ t \geq 0,\ s \geq 0,\ t + s \leq 1,\ (x, y) = t(\pi, 0) + s(\pi, \pi)\}$$

により定める．

1) D を図示せよ．

2) $\displaystyle\int_D \frac{y \sin x}{x} dxdy$ を累次積分（逐次積分）により二通りに表せ．

3) $\displaystyle\int_D \frac{y \sin x}{x} dxdy$ を求めよ．

問 12.2. $D(R) \subset \mathbb{R}^2$ を $D(R) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R\}$ により定め，

$$S(R) = \int_{D(R)} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

と置く．

1) $\displaystyle\lim_{R \to +\infty} S(R)$ が存在することを示せ．

2) $\displaystyle\lim_{R \to +\infty} S(R)$ を求めよ．この値を $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$ と定める．つまり，

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \lim_{R \to +\infty} \int_{D(R)} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

と定める．

3) $\displaystyle\lim_{r \to +\infty} \int_0^r e^{-x^2} dx$ が存在することを示せ．この値を $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ と定める．

4) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2$ が成り立つことを示せ．また，$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ を求めよ．

函数 $x \mapsto e^{-x^2}$ あるいはその積分は正規分布（ガウス分布）と関連が深い．これらは確率や統計において重要であるが，それに限らず，例えば幾何などでも重要である．

問 12.3 (よくわからなければ，まず f を連続として考えてみよ).

1) $a, b \in \mathbb{R}$，$a < b$ とし，$f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ を可積分な函数とする．このとき，f は (a, b) 上広義積分可能であって，$\displaystyle\int_{(a,b)} f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)dx$ が成り立つことを示せ．また，(a, b) を $(a, b]$ あるいは $[a, b)$ としても同様のことが成り立つことを示せ．

2) $-\infty < a < b \leq +\infty$ とし，$f\colon [a, b) \to \mathbb{R}$ を広義可積分な函数とする．このとき，f は (a, b) 上広義可積分であって $\displaystyle\int_{(a,b)} f(x)dx = \int_{[a,b)} f(x)dx$ が成り立つことを示せ．また，$[a, b)$ を $(a, b]$，ただし $-\infty \leq a < b < +\infty$，としても同様のことが成り立つことを示せ．

問 12.4. $-\infty < a < b \leq \infty$ とし，$f, g\colon [a, b) \to \mathbb{R}$ は $[a, b)$ 上広義可積分であるとする．このとき，任意の $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ について $\lambda f + \mu g$ も $[a, b)$ 上広義可積分であって，

$$\int_{[a,b)} (\lambda f + \mu g)(x)dx = \lambda \int_{[a,b)} f(x)dx + \mu \int_{[a,b)} g(x)dx$$

が成り立つことを示せ．また，$[a,b)$ を $(a,b]$（ただし $-\infty \leq a < b < +\infty$）あるいは (a,b)（ただし $-\infty \leq a < b \leq +\infty$）としても同様のことが成り立つことを示せ．

問 12.5. $a,b \in \mathbb{R}$，$a < b$ とし，$f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ を連続とする（ただし $n \in \mathbb{N}$）．また，函数 $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ について $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = 0$ が成り立つとする．

1) f は連続であることを示せ．
2) 1) により f は $[a,b]$ 上可積分である．積分について，$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ が成り立つことを示せ．

問 12.6 (問 12.5 の 2) も参照のこと).
$a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とし，$g, g_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ を可積分函数とする．また，$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[a,b]} |g_n(x) - g(x)| = 0$ が成り立つとする．このとき $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b g_n(x)dx = \int_a^b g(x)dx$ が成り立つことを示せ．
ヒント：$g - g_n$ は可積分であるので，$|g - g_n|$ もそうである．従って，不等式

$$\left|\int_a^b g(x)dx - \int_a^b g_n(x)dx\right| \leq \int_a^b |g(x) - g_n(x)|\,dx \leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |g(x) - g_n(x)|$$

が成り立つ．

問 12.7. $a,b \in \mathbb{R}$，$a < b$ とし，$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ を連続とする．$\varepsilon > 0$ が与えられたとすると，$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ をみたす $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ と，$t_0, \ldots, t_{n-1} \in \mathbb{R}$ が存在して，$g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ を $g(x) = \begin{cases} t_i, & a_i \leq x < a_{i+1}, \\ t_{n-1}, & x = a_n \end{cases}$（最後は t_n の誤りではない）により定めると，$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)| < \varepsilon$ が成り立つことを示せ．g のような，区間毎に定数であるような函数を**階段函数**と呼ぶ．

問 12.8 (リーマン・ルベーグの定理). $a,b \in \mathbb{R}$，$a \leq b$ とし，$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ を連続とする．このとき $\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(x)\sin(\lambda x)dx = 0$ が成り立つことを以下の手順で示せ．最終的には $\lambda \to +\infty$ とするので，以下では $\lambda > 0$ とする．

1) まず状況が極端に簡単な場合として，f が定数である場合を考える．$f(x) = c$ とすれば $\int_a^b f(x)\sin(\lambda x)dx = \frac{-c}{\lambda}[\cos(\lambda x)]_a^b$ が成り立つことを示せ．また，リーマン・ルベーグの定理が $f(x) = c$ の場合に成り立つことを示せ．
2) f が階段函数である場合に，リーマン・ルベーグの定理が成り立つことを示せ．
3) 問 12.7 を用いてリーマン・ルベーグの定理を示せ．

ところで，次のように考えることもできる．λ が大きくなると，$\sin(\lambda x)$ は激しく振動するので，x が少し変化して x' になったとすると，$f(x)\sin(\lambda x) \fallingdotseq f(x)$ と $f(x')\sin(\lambda x') \fallingdotseq -f(x') \fallingdotseq -f(x)$ が成り立つ（f は連続なので x と x' が近ければ $f(x)$ と $f(x')$ も近い）．このような状況でリーマン和を取ると，$f(x)v(I)$ の形をした部分と $f(x')v(I)$ の形をした部分が打ち消し合って，積分値が 0 になる．

5) リーマン・ルベーグの定理の，上の考え方に従った証明を与えよ（やや面倒である）．

（以上）