２０１５年度微分積分学（理Ｉ 32〜35 組向け，足助担当）　演習問題 １１　2015/10/12（月）
'15/11/2：問 11.2 の誤植を修正.

問 11.1. $V = \{f\colon [-1,1] \to \mathbb{R} \mid f$ は連続 $\}$ とする．$f, g \in V$ について

$$\langle f \mid g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

と置く．以下の問に答えよ．なお，講義で扱っていない用語は線型空間に関するものである．いずれも初歩的なものなので定義を知らなければ調べること．

1) V は $\mathbb{R}$-線型空間であることを示せ.
2) $\langle \cdot | \cdot \rangle$ は V の内積を定めることを示せ.
3) 正の整数 n について，$P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\sqrt{\dfrac{2n+1}{2}}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ と置く．$\{P_n\}_{n=1,2,\ldots}$ は $\langle \cdot | \cdot \rangle$ に関して正規直交系をなす事を示せ.
4) $\{P_n\}_{n=1,2,\ldots}$ は V の正規直交基底であるか，理由と共に述べよ.

V の内積を上のように定めることは次の意味で自然である．V を次のように有限次元線型空間で「近似」する．即ち，

$$V_n = \left\{ (a_{-n+1}, a_{-n+2}, \ldots, a_0, \ldots, a_n) \,\middle|\, \exists\, f \in V,\ a_k = f\left(\frac{k}{n}\right) \right\}$$

と置く．$V_n \cong \mathbb{R}^{2n}$（$\mathbb{R}$-線型同型）が成り立つことが示せる．$\mathbb{R}^{2n}$ の標準的な内積を，同型を通して V_n で考えると，$a = (a_{-n+1}, a_{-n+2}, \ldots, a_0, \ldots, a_n)$, $b = (b_{-n+1}, b_{-n+2}, \ldots, b_0, \ldots, b_n)$ について

$$\langle a \mid b \rangle_{V_n} = \sum_{k=-n+1}^{n} a_k b_k$$

が得られる．$f, g \in V$ を用いて $a_k = f\left(\dfrac{k}{n}\right)$, $b_k = g\left(\dfrac{k}{n}\right)$ と書き直して，a, b をそれぞれ f, g で表してしまうと

$$\langle f \mid g \rangle_{V_n} = \sum_{k=-n+1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right)$$

を得る．$n \to +\infty$ とするまえに，定数函数 1 の大きさ（自分自身との内積の平方根）が $\sqrt{\langle 1 \mid 1 \rangle} = \sqrt{2}$ となるように，内積を調節（正規化）しておく．実際には，上の内積を $\dfrac{1}{n}$ 倍しておけばよい．新しい内積を $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_n$ で表すと，

$$\langle f \mid g \rangle_n = \sum_{k=-n+1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right)$$

で与えられる．fg は $[-1,1]$ 上連続なのでリーマン可積分であるから，$n \to +\infty$ とすると上の内積が得られる．

問 11.2. $V = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ は連続かつ $f(x+1) = f(x)\}$ と置く．$n \in \mathbb{N},\ n > 0$ について，$f_n, g_n \in V$ を $f_n(x) = \cos 2\pi nx,\ g_n(x) = \sin 2\pi nx$ により定める．また，$f_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とし，g_0 は考えない．

1) 次の関係式が成り立つことを示せ．

$$2\int_0^1 f_n(x)f_m(x)dx = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m \end{cases},$$

$$2\int_0^1 g_n(x)g_m(x)dx = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m \end{cases},$$

$$2\int_0^1 f_n(x)g_m(x)dx = 0.$$

ヒント：三角函数の積和公式を用いるか，オイラーの公式 $e^{\sqrt{-1}t} = \cos t + \sqrt{-1}\sin t$ を用いるのが簡単である．

2) $f, g \in V$ について $\langle f \mid g \rangle = 2\displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)dx$ と置く．$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ は V の内積である．1) により，$\{f_0, f_1, \ldots, g_1, g_2, \ldots\}$ は正規直交系である．そこで $f \in V$ について $a_n = \langle f_n \mid f \rangle,\ b_n = \langle g_n \mid f \rangle$ と置く．もし $f = c_0 f_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(c_n f_n + d_n g_n)$ と表され，無限和と積分の交換や，無限和について和を取る順序を自由に入れ替えて良いとすると，$c_0 = a_0$ かつ $d_0 = b_0$ が成り立つことを示せ．

ヒント：実はここまで仮定を置けば線型代数の問題である．本当は「〜と表され，⋯ 良いとすると」の部分が問題で，ここは微積分の範疇である．

3) 2) と同様の仮定を置く．$f = c_0 f_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(c_n f_n + d_n g_n)$ と表されているとして，$\langle f \mid f \rangle$ を $c_n,\ d_n$ を用いて表せ．

問 11.2 はフーリエ展開・フーリエ級数に関する初歩的な事柄である（フーリエ変換というのもあって似ているが，これはまた別の話である）．時間に余裕があれば講義でも簡単に扱う．
'15/11/2 追記：恐らく講義で扱う時間は取れないが，その場合には演習問題として扱う．

（以上）