２０１４年度数学 II（理 I 16,21,22 組向け，足助担当）　演習問題 7　　　　'14/12/1（月）

以下では特に断らなければ K で $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ を表す．

問 7.1. 以下の主張が正しければ証明し，そうでなければ反例を一つ挙げよ．

1) $A \in M_n(\mathbb{C})$ とする．A が正則であれば A は（$\mathbb{C}$ 上）対角化可能である．
2) $A \in M_n(\mathbb{C})$ とする．A が正則でなければ A は対角化不可能である．
3) $A \in M_n(\mathbb{C})$ とする．A が対角化可能であるならば A は正則である．
4) $A \in M_n(\mathbb{C})$ とする．A が対角化可能であれば A^n は任意の $n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$ について対角化可能である．
5) $A \in M_n(\mathbb{C})$ とする．A が対角化不可能であれば A^n は任意の $n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$ について対角化不可能である．

注. $M_n(\mathbb{C})$ の元については単に「対角化可能」と言えば「$\mathbb{C}$ 上対角化可能」という意味である．一方 $M_n(\mathbb{R})$ の元については $\mathbb{R}$ 上対角化可能であることと，$\mathbb{C}$ 上対角化可能であることには大きな差があり，どちらも大切なので単に「対角化可能」と言いたければ事前にどちらを指すのか指定しておく必要がある．

問 7.2. $A \in M_n(K)$ とする．A が 0 を固有値（の一つ）に持つことと，A が正則でないことは同値であることを示せ．

問 7.3. $\mathbb{C}^n$ には標準エルミート計量を入れる．$A \in M_n(\mathbb{C})$ とし，A は対角化可能であるとする．λ を A の固有値で，絶対値が最大なものの一つとする．このとき $S^{2n-1} = \{v \in \mathbb{C}^n \mid \|v\| = 1\}$ と置き，$f\colon S^{2n-1} \to \mathbb{R}$ を

$$f(v) = \limsup_{m\to+\infty} \sqrt[m]{\|A^m v\|} = \varlimsup_{m\to+\infty} \sqrt[m]{\|A^m v\|}$$

により定める．

1) $f(v) \leq |\lambda|$ が成り立つことを示せ．
2) v が λ に属する固有ベクトルならば $f(v) = |\lambda|$ が成り立つことを示せ．
3) A の固有値の絶対値はすべて異なると仮定する．λ に属する固有ベクトルではないが，$f(v) = |\lambda|$ が成り立つような v が存在するような A の例を一つ挙げよ．
   ヒント：$n = 2$ として $M_2(\mathbb{R})$ に属する対角行列で例が作れる．

注. この種の極限を考える際には $\sqrt[m]{\|A^m v\|}$ の代わりに対数を取った $\dfrac{1}{m}\log\|A^m v\|$ もよく用いられ有用であるが，この場合には $\|A^m v\| > 0$ であるかどうかなど，気にすべきことがいくつか生じる．

問 7.4. $A \in M_n(\mathbb{R})$ とする．A が複素行列として対角化可能であるとする．すなわち，ある $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ が存在して $P^{-1}AP$ は対角行列であるとする．

1) A の固有値がすべて実数であることと，$P^{-1}AP \in M_n(\mathbb{R})$ が成り立つことは同値であることを示せ．

2) 1) の同値な条件が満たされているとする．このとき，ある $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ が存在して $Q^{-1}AQ$ は対角行列であることを示せ．また，対角成分の入れ替えを許せば $P^{-1}AP$ と $Q^{-1}AQ$ は等しいことを示せ．

問 7.5. 1) $A \in M_n(\mathbb{R})$ とし，A の固有値は複素数の範囲で考えるものとする．λ を A の固有値で，実数でないものとすると $\overline{\lambda}$ も A の固有値であることを示せ．

2) $A \in M_n(\mathbb{C})$ であって，ある $\lambda \in \mathbb{C}$ について λ は A の固有値であるが，$\overline{\lambda}$ は A の固有値ではないような A, λ の例を一組挙げよ．

問 7.6. $\theta \in \mathbb{R}$ とし，$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ とする．

1) A は $\mathbb{C}$ 上対角化可能である．対角化せよ．

2) A が $\mathbb{R}$ 上対角化可能であるための必要十分条件は $\theta \in \pi\mathbb{Z}$，つまり $\theta = n\pi$ がある $n \in \mathbb{Z}$ について成り立つことであることを示せ．

問 7.7. $A \in M_n(\mathbb{R})$ とし，複素数の範囲では A は対角化可能であるとする．$\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$, $\mu_1, \ldots, \mu_s \notin \mathbb{R}$ とし，A の相異なる固有値全体は $\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \mu_1, \overline{\mu_1}, \ldots, \mu_s, \overline{\mu_s}$ であるとする（従って $\operatorname{im}\mu_i > 0$ と仮定してよい．この仮定はしばらくは不要なので置かないが，6) には用いる）．

1) $z_i \in \mathbb{C}^n$ を μ_i に属する（$A \in M_n(\mathbb{C})$ とみなしたときの）A の固有ベクトルとする．$\overline{z_i} \in \mathbb{C}^n$ は $\overline{\mu_i}$ に属する A の固有ベクトルであることを示せ．

2) $V_i = \langle z_i, \overline{z_i} \rangle \subset \mathbb{C}^n$ とする．$v \in V_i$ ならば $Av \in V_i$ であることを示せ．

3) $u_i = \dfrac{z_i + \overline{z_i}}{2}, w_i = \dfrac{z_i - \overline{z_i}}{2\sqrt{-1}}$ と置く．(u_i, w_i) は V_i の順序付き基底であることを示せ．

4) $f_i \colon V_i \to V_i$ を $f_i(v) = Av$ により定める．f_i の (u_i, w_i) に関する表現行列を求めよ．

5) $u_i, w_i \in \mathbb{R}^n$ であることに注意して，ある $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ が存在し，

$$
\begin{aligned}
P^{-1}AP &= (\lambda_1) \oplus \cdots \oplus (\lambda_r) \oplus \begin{pmatrix} \operatorname{re}\mu_1 & -\operatorname{im}\mu_1 \\ \operatorname{im}\mu_1 & \operatorname{re}\mu_1 \end{pmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{pmatrix} \operatorname{re}\mu_s & -\operatorname{im}\mu_s \\ \operatorname{im}\mu_s & \operatorname{re}\mu_s \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}
\lambda_1 &&&&&&&& \\
& \lambda_2 &&&&&&& \\
&& \ddots &&&&&& \\
&&& \lambda_r &&&&& \\
&&&& \operatorname{re}\mu_1 & -\operatorname{im}\mu_1 &&& \\
&&&& \operatorname{im}\mu_1 & \operatorname{re}\mu_1 &&& \\
&&&&&& \ddots && \\
&&&&&&& \operatorname{re}\mu_s & -\operatorname{im}\mu_s \\
&&&&&&& \operatorname{im}\mu_s & \operatorname{re}\mu_s
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

が成り立つことを示せ．

6) $\operatorname{im}\mu_i > 0$ と仮定すると，5) の右辺の行列は，(λ_i), $1 \le i \le r$ および $\begin{pmatrix} \operatorname{re}\mu_j & -\operatorname{im}\mu_j \\ \operatorname{im}\mu_j & \operatorname{re}\mu_j \end{pmatrix}$, $1 \le j \le s$ の並び替えを除いて一意的であることを示せ（$\operatorname{im}\mu_j \neq 0$ に注意せよ）．
ヒント：対角化して得られる行列の一意性に帰着させるのが（おそらく一番）容易である．

（以上）