２０１４年度数学II（理I 16,21,22 組向け，足助担当）　演習問題 5　　　’14/11/10（月）

以下では特に断らなければ K で $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ を表す．

定義 5.1. $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が C^∞ 級の**微分同相写像**であるとは，f は C^∞ 級の写像であって，また f の逆写像が存在して C^∞ 級であることを言う．

もう少し具体的に言えば，C^∞ 級の写像 $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が存在して $g \circ f = f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ が成り立つ，ということである．

問 5.2. $t \in \mathbb{R}$ とする．$f_t\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を

$$f_t(v) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} v$$

により定める．

1) f_t は微分同相写像であることを示せ．
2) $\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2$ が成り立つことを示せ．
3) $v \in \mathbb{R}^2$ とする．$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を

$$\varphi(v) = \left.\frac{d}{dt} f_t(v)\right|_{t=0} = \left(\frac{d}{dt} f_t(v)\right)(0)$$

により定める（最後の等号は定義である）．φ を具体的に求めて線型写像であることを確かめ，$\mathbb{R}^2$ の標準（的な順序付き）基底に関する表現行列を求めよ．これを X とする．
4) $X \in \mathfrak{o}_2$ が成り立つことを示せ．すなわち，X は歪対称行列であることを示せ．

定義 5.3. $X \in M_n(K)$ とする．

$$\begin{aligned} \exp X &= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} X^i \\ &= E_n + X + \frac{1}{2} X^2 + \cdots + \frac{1}{i!} X^i + \cdots \end{aligned}$$

と置き，$\exp\colon M_n(K) \to \mathrm{GL}_n(K)$ を（行列の）**指数函数**と呼ぶ．

この定義にはいくつか問題がある．たとえば $\exp X \in \mathrm{GL}_n(K)$ が成り立つかは直ちにはわからないし，そもそも $\exp X$ を定める級数が本当に収束しているのかも調べる必要がある．後者についてはここでは認めることにする．また，$\exp X$ の収束は**コンパクト一様収束**あるいは**広義一様収束**と呼ばれる大変都合のよい収束なので，たとえば $(\exp X)(\exp Y)$ は多項式の掛け算のように計算してよいし，$t \in \mathbb{R}$ とすると $\dfrac{d}{dt} \exp(tX)$ は級数を項別に微分すれば計算することができる．積分についても同様に項別に積分すればよい．これらのこともここでは認めることにする．

問 5.4. $X, Y \in M_n(K)$ とする．

1) $XY = YX$ ならば $(\exp X)(\exp Y) = (\exp Y)(\exp X) = \exp(X+Y)$ が成り立つことを示せ.
2) $n = 2$ とする．$XY \neq YX$ であるような X, Y であって $(\exp X)(\exp Y), (\exp Y)(\exp X)$, $\exp(X+Y)$ のうちどの二つも等しくないような例を挙げよ.
3) $\exp X \in \mathrm{GL}_n(K)$，より詳しく，$(\exp X)^{-1} = \exp(-X)$ が成り立つことを示せ.

定義 5.5. $X\colon \mathbb{R} \to M_n(K)$ を $M_n(K)$ に値をとる函数とする．変数は t とする．X を成分を用いて

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

と表したとき，各 x_{ij} が C^r 級（微分可能）の時，X は C^r 級（微分可能）であると定める．ただし，複素数値の函数の微分は実部と虚部それぞれについてとることにより定める．すなわち，$f = g + \sqrt{-1}h$，ただし g, h は実数値函数，ならば

$$\frac{df}{dt} = \frac{dg}{dt} + \sqrt{-1}\frac{dh}{dt}$$

と定める.

問 5.6. $X \in M_n(K), t \in \mathbb{R}$ とする.

1)
$$\frac{d}{dt}\exp(tX) = X\exp(tX) = (\exp(tX))X$$
が成り立つことを示せ.

2) K^n に値をとる，実数 t に関する C^1 級の函数 v に関する常微分方程式

(5.7)
$$\frac{dv}{dt}(t) = Xv(t)$$

を考える.

a) $v_0 \in K^n$ とし，$v(t) = (\exp(tX))v_0$ と定めると v は (5.7) の解であることを示せ.
b) $v = v(t)$ を (5.7) の解とする．$\dfrac{d}{dt}((\exp(-tX))v)(t) = 0$ が成り立つことを示せ.
c) 微分方程式 (5.7) の解をすべて求めよ．特に，$v_0 \in K^n$ とし，$v(0) = v_0$ を満たす解をすべて求めよ.

問 5.8. $X \in M_n(K), P \in \mathrm{GL}_n(K)$ とする．$\exp(P^{-1}XP) = P^{-1}(\exp X)P$ が成り立つことを示せ.

問 5.9. 1) $X = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ とする．$\exp(tX)$ を求めよ.

2) $\lambda \in K$ とし，$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & \\ & & & & \lambda & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix} \in M_n(K)$ と置く．$n = 1$ の時には $J_1(\lambda) = (\lambda)$ と定める．$\exp(tJ_n(\lambda))$ を求めよ．$J_n(\lambda)$ は n 次の **Jordan block** あるいは Jordan 細胞（cell）などと呼ばれる．

ヒント：直接計算しても難しくはないが，$J_n(\lambda) = \lambda E_n + N_n$，ただし $N_n = J_n(0)$ として問 5.4 を用いると楽である．

3) $X \in M_n(K)$ が正方行列 $X_1, \ldots, X_r$ を用いて $X = X_1 \oplus \cdots \oplus X_r$ と区分け（直和分解）されているとする，すると $\exp X = (\exp X_1) \oplus \cdots \oplus (\exp X_r)$ が成り立つことを示せ．

4) Jordan 標準形について調べ，一般の $X \in M_n(K)$ について $\exp(tX)$ を求める方法を考えよ（Jordan 標準形の求め方などについては後日扱うので，ここでは気にしなくて良い）．

※ Jordan 標準形そのものは講義の範囲からは外れるが，用いる手法はほぼ対角化と同様であるし，応用も多いので早めに触れておいた方がよい．

問 5.10. 1) a) $X \in \mathfrak{o}_n$ とすると，$\exp X \in \mathrm{O}_n$ が成り立つことを示せ．

b) $X\colon \mathbb{R} \to \mathrm{O}_n$ を C^1 級の写像（函数）で，$X(0) = E_n$ であるものとする．ここで，X が C^1 級であるとは，X の (i,j)-成分を実数値函数と見なしたときにこれらがすべて C^1 級であることとする．すると $\left.\dfrac{d}{dt}X(t)\right|_{t=0} \in \mathfrak{o}_n$ が成り立つことを示せ．

2) 1) で $\mathfrak{o}_n$ を $\mathfrak{u}_n$ に，O_n を U_n に置き換えても同様のことが成り立つことを示せ．ただし，X の定義域は $\mathbb{R}$ のままとする．

3) 1) で $\mathfrak{o}_n$ を $\{X \in M_n(K) \,|\, X$ は上（下）三角行列$\}$ に，O_n を $\{X \in M_n(K) \,|\, X$ は正則な上（下）三角行列$\}$ に置き換えても同様のことが成り立つことを示せ．ただし，X の定義域は $\mathbb{R}$ のままとする．

問 5.11. $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ を計量線型空間とし，$\|\cdot\|$ を計量から定まるノルムとする．V の線型変換 f がノルムを保てば f は計量を保つことを示せ．すなわち，$\forall v \in V,\ \|f(v)\| = \|v\|$ が成り立つならば $\forall v, w \in V,\ \langle f(v) \,|\, f(w) \rangle = \langle v \,|\, w \rangle$ が成り立つことを示せ．
※ 計量（内積）をノルムで表してみよ．$K = \mathbb{C}$ の時には一工夫いる．

問 5.12. K^n に標準計量を入れる．

1) K^n の線型変換 f が条件 $\forall v \in K^n,\ \|f(v)\| = \|v\|$ を満たすのであれば，ある O_n（$K = \mathbb{R}$ の場合）あるいは U_n（$K = \mathbb{C}$ の場合）の元 A が存在して $\forall v \in K^n,\ f(v) = Av$ が成り立つことを示せ．

ヒント：まず $\|f(\lambda v + \mu v') - (\lambda f(v) + \mu f(v'))\|^2$ を計算してみよ．

2) K^n から K^n 自身への写像 f が条件 $\forall v, w \in K^n,\ \|f(v)-f(w)\| = \|v-w\|$ を満たすのであれば，ある O_n（$K=\mathbb{R}$ の場合）あるいは U_n（$K=\mathbb{C}$ の場合）と K^n の元 v_0 が存在して $\forall v \in K^n,\ f(v) = Av + v_0$ が成り立つことを示せ．
ヒント：$w=o$ としてみよ．なお，このような f はいわゆる剛体の運動（rigid motion）を表す．f が適切な意味で C^1 級にパラメータ（$t \in \mathbb{R}$ とする）づけられているとする．このとき，パラメータに関する微分により $\mathfrak{o}_n$ や $\mathfrak{u}_n$ の元が問 5.10 と同様に現れる．一方，$v \in K^n$ を固定し，t を動かすと $\{f_t(v)\}$ は v が辿る軌跡と考えることができる．従って t に関する微分を考えることは速度ベクトルを考えることになり，K^n 上のベクトル場が自然に現れる．

問 5.13 (問 1.37 の 4) も参照のこと)**.** $\langle\cdot|\cdot\rangle$ を $\mathbb{R}^n$ のユークリッド計量とする．$v \in \mathbb{R}^n,\ v \neq o$ とする．$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を

$$f(w) = \langle v \,|\, w\rangle$$

により定める．条件 $\|w\| = 1$ の下で，f が最大値をとるのは $w = \dfrac{1}{\|v\|}v$ の時であることを示せ．

問 5.14. $A=(a_{ij}), B=(b_{ij}) \in M_n(K)$ について

$$d(A,B) = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}-b_{ij}|^2}$$

と定める．

1) $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ とする．

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \exists B \in M_n(K),\ d(A,B)<\delta \Rightarrow B \in \mathrm{GL}_n(K)$$

が成り立つことを示せ．つまり，A とあまり成分が異ならない行列は正則であることを示せ（この種の性質は「安定性」と呼ばれる）．

2) $A \in M_n(K)$ であって，A は正則でない（$A \notin \mathrm{GL}_n(K)$）とする．

$$\forall\varepsilon>0\ \exists B \in \mathrm{GL}_n(K),\ d(A,B)<\epsilon$$

が成り立つことを示せ．つまり，正則でない A といくらでも成分の差が少ない行列で，正則な行列が存在することを示せ（この種の性質は「不安定性」と呼ばれる）．

必要であれば事実「$\forall M_n(K),\ \exists P \in \mathrm{GL}_n(K),\ P^{-1}AP$ は上三角行列」を用いて良い．このように，適当な P を用いて $P^{-1}AP$ を上（下）三角行列にすることを**三角化**と呼ぶ．三角化については後日講義で扱う．

（本編ここまで）

「おまけ」（全２頁）がある．

http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~asuke/ensyuu/14la/2014_05.pdf

を参照のこと．

※ これ以降は「おまけ」である．

問 5.15. $(\ell_2, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ を

$$\ell_2 = \left\{ a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \,\middle|\, a_n \in K,\ \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 < +\infty \right\},$$

$$\langle a \,|\, b\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{a_n} b_n$$

により定めると，$(\ell_2, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ は計量線型空間である（ここでは認めてよい．興味があれば Cauchy(-Schwarz) の不等式（講義で扱ったものの「無限個の成分」版）や Hölder の不等式について調べてみよ）．ℓ_2 の部分線型空間 W を

$$W = \{a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \,|\, \exists\, N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow a_n = 0\}$$

により定める．$a \in \ell_2$ が W と直交するとする．$M \in \mathbb{N}$ とし，$b^M = \{b_n^M\}_{n\in\mathbb{N}}$ を

$$b_n^M = \begin{cases} a_n, & n \leq M, \\ 0, & n > M \end{cases}$$

により定める．

1) $b^M \in W$ が成り立つことを示せ．

a は W と直交するのだから $\langle b^M \,|\, a\rangle = 0$ が成り立つ．

2) $a_0 = \cdots = a_M = 0$ が成り立つことを示せ．

M は任意にとれるから，結局 $a = 0$ が成り立つ．従って

$$\{v \in \ell_2 \,|\, \forall\, w \in W,\ \langle w \,|\, v\rangle = 0\} = \{o\}$$

が成り立つ．ところで

$$a_n = \frac{1}{n+1}$$

とすると $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2 = \dfrac{\pi^2}{6}$ が成り立つ（興味があれば調べてみよ．なお収束することを示すだけなら容易である）ので $W \subsetneq \ell_2$ である．

3) 講義で定めた意味での直交補空間は存在しないことを示せ．すなわち，W に直交する ℓ^2 の部分線型空間 $W^\perp$ であって $\ell_2 = W \oplus W^\perp$ が成り立つものは存在しないことを示せ．

定義 5.16. A を添字集合とし，$\{v_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を V の元からなる族（集まり）とする．

1) $\{v_\alpha\}_{\alpha\in A}$ が線型独立であるとは，任意の有限個の $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in A$ について $\{v_{\alpha_1}, \ldots, v_{\alpha_r}\}$ が線型独立であることを言う．

2) $\{v_\alpha\}_{\alpha\in A}$ が生成する V の部分線型空間を

$$\{v \in V \,|\, \exists\, r \in \mathbb{N},\ \exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_r,\ \exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_r,\ v = \lambda_1 v_{\alpha_1} + \cdots + \lambda_r v_{\alpha_r}\}$$

により定め，$\langle v_\alpha\rangle_{\alpha\in A}, \mathrm{Span}(\{v_\alpha\}_{\alpha\in A})$ などで表す．$V = \mathrm{Span}(\{v_\alpha\}_{\alpha\in A})$ が成り立つとき，$\{v_\alpha\}_{\alpha\in A}$ は V を生成すると言う．

3) $\{v_\alpha\}_{\alpha\in A}$ が V の基底であるとは，$\{v_\alpha\}_{\alpha\in A}$ が線型独立であって，V を生成することを言う．

問 5.17. A が有限集合であれば定義 5.16 は講義で扱った線型独立，生成系，基底の定義と一致することを確かめよ．

問 5.15 (続き). 4) $e_i \in \ell_2$ を $(e_i)_n = \begin{cases} 1, & n = i, \\ 0, & n \neq i \end{cases}$ により定める．$\{e_i\}$ は W の基底であることを示せ．

5) $v \in V$ について $p(v)$ を

$$p(v) = \sum_{i=0}^{+\infty} \langle e_i \,|\, v\rangle e_i = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} \langle e_i \,|\, v\rangle e_i$$

により定めることができることを示せ，

6) 5) で定めた p は恒等写像であることを示せ．従って，直交射影と同じ式で定めたのにもかかわらず，p は V から W への写像とはならない．

定義 5.16 で定めた基底は**代数的な基底**などと呼ばれることがある．一方，問 5.15 の 6) を踏まえると，4) の e_i について，$\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ も基底のようなものと考えることができる．計量が入った線型空間の場合には極限を考えることも許し，$\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ のような性質を持つものを**基底**と呼ぶことも非常に多い．今の場合には $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ は（極限を許すと）**正規直交基底**である．最大の差は，前者のような代数的な基底を考えるときには必ず有限和を用いるが，後者の場合には極限（収束する無限和）を許すことである．より詳しいことは函数解析の教科書を参照するとよいが，今慌てる必要はない．

（以上）