２０１４年度数学 II（理 I 16,21,22 組向け，足助担当）　演習問題 3　　'14/10/15（水）
'14/10/16：注 3.2 を修正，問 3.4 を追加．
'14/10/30：問 3.8 と 3.9 がそれぞれ問 4.1 と 4.2 と重複していたので削除．問 3.10 は 3.9 に繰り上げて新たに定義 3.10 以下を追加．
'14/11/2：定義 3.10 の誤植を修正．
以下では特に断らなければ K で $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ を表す．

問 3.1 (やや難しい). W_1, W_2 を V の部分線型空間とする．W_1 と W_2 は V の部分線型空間であることを一度忘れて，単に線型空間とみなす．そして

$$W_1 \times W_2 = \{(w_1, w_2) \mid w_1 \in W_1,\ w_2 \in W_2\}$$

と置き，$(w_1, w_2) + (u_1, u_2) = (w_1 + u_1, w_2 + u_2)$，$\lambda(w_1, w_2) = (\lambda w_1, \lambda w_2)$ と定める．

1) $W_1 \times W_2$ は K-線型空間であることを示せ．$W_1 \times W_2$ を W_1 と W_2 の**直積**と呼ぶ．
2) $g\colon W_1 \times W_2 \to W_1 + W_2$ を $g(w_1, w_2) = w_1 + w_2$ で定めると，g は K-線型写像であることを示せ．
3) $f\colon W_1 \cap W_2 \to W_1 \times W_2$ を $f(u) = (u, -u)$ により定めると，$\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$ であって，かつ $f\colon W_1 \cap W_2 \to \operatorname{Ker} g$ は線型同型写像であることを示せ．従って $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$ が成り立つ．
4) $\dim(W_1 \times W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$ が成り立つことを示せ．
5) 定理 2.10.4 を用いて定理 7.2.6 を示せ．

注 3.2. 一般に，線型空間 V, W, U と線型写像 $f\colon V \to W, g\colon W \to U$ が存在して，これらに何らかの関係があるとき，

(3.3)
$$V \xrightarrow{\ f\ } W \xrightarrow{\ g\ } U$$

と表して**図式**（diagram）あるいは**系列**（sequence）と呼ぶ．特に $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$ の場合が大切であるが，更に問 3.1 のように $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$ という関係があるとき，図式 (3.3) は**完全系列**（exact sequence）である，あるいは単に**完全**（exact）である[1]と言う．線型空間や線型写像がもっとたくさんあっても同様に図式を考える．問 3.1 では包含写像 $\{o\} \to W_1 \cap W_2$ と零写像 $W_1 + W_2 \to \{o\}$ も考えて

$$\{o\} \longrightarrow W_1 \cap W_2 \xrightarrow{\ f\ } W_1 \times W_2 \xrightarrow{\ g\ } W_1 + W_2 \longrightarrow \{o\}$$

とするとこれは完全系列である．図式については基底の取り替えの辺りでも一度述べたので参照のこと．図式に関しては「可換図式」という概念も大切である．これについても基底の辺りで述べた．

問 3.4. 図式 (3.3) において $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$ が成り立つことと，$g \circ f = 0$ が成り立つことは同値であることを示せ．

[1] 一定の関係にある図式がたくさんあるときには系列と呼ぶことが多いが，単独の物は図式と呼ぶことが多い．一方「完全図式」とは単独の図式についてもあまり言わない．ところで「完全」はどちらかというと「ぴったり」と言った方が適切であるが，(多分格好悪いので）このように呼ぶ．完全系列，あるいは $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$ が成り立つような図式は数学のあちらこちらに現れる．例えばベクトル解析に関連して，完全（微分）形式や閉形式を扱うと現れる．

定義 3.5. V_1, V_2 を K-線型空間とする．$V_1 \times V_2$ の部分線型空間 W を

$$W = \{(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2 \mid \text{有限個の添え字を除いて } v_i = o\}$$

と置く．W を V_1 と V_2 の**直和**と呼び，$V_1 \oplus V_2$ で表す[2]．V_i 達が無限個あると，条件「有限個の添え字を除いて $v_i = o$」は非自明であって，直和と直積は異なるが，今はそもそも添え字が 2 個しかないので，$i = 1$ と $i = 2$ を常に除く添え字と考えれば，結局この条件は常にみたされる．従って $V_1 \oplus V_2 = V_1 \times V_2$ が成り立つ（これは V_i 達が有限個であるならば同様に成り立つ）．特に $V_1 \oplus V_2$ は K-線型空間である（これは無限個の V_i について直和を定めても同様である）．

問 3.6. V を K-線型空間とする．W_1, W_2 を V の部分線型空間とし，$W_1 + W_2$ は定義 7.1.1 の意味で直和であるとする．U を定義 3.5 の意味での W_1 と W_2 の直和とし，$U_1 = \{(w_1, o) \in U \mid w_1 \in W_1\}$，$U_2 = \{(o, w_2) \in U \mid w_2 \in W_2\}$ とする．最後に $f \colon U \to V$ を $f(w_1, w_2) = w_1 + w_2$ により定める．

1) $\operatorname{Im} f = W_1 + W_2$ が成り立つことを示せ．
2) f を U から $W_1 + W_2$ への写像とみなしたものを g で表すことにする．すると g は K-線型同型写像であることを示せ．
3) $g^{-1}(W_1) = U_1$ が成り立つことを示せ．更に，g の U_1 への制限（定義 2.10.6）を g_1 とすると $g_1 \colon U_1 \to W_1$ は K-線型同型写像であることを示せ．また，W_2, U_2 についても同様のことが成り立つことを示せ．

問 3.7. $i = \mathbb{N}$ とし，各 i について $V_i = K$ と置く．

1) $V = \{\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in K\}$ を数列全体の成す線型空間とすると，$V \cong \prod_{i\in\mathbb{N}} V_i$ が成り立つことを示せ．
2) $K[t] \cong \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} V_i$ が成り立つことを示せ．
3) $\varphi \colon K[t] \to V$ を次のように定める．即ち，$f \in K[t]$ を $f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ と表し，数列 $\varphi(f)$ を $\varphi(f) = \{a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots\}$ により定める．すると φ は線型写像であるが，線型同型写像ではないことを示せ．

問 3.8 (微積分と線型代数が頭のなかで結びついていないと結構難しい)**.** $C^\infty(\mathbb{R}) = \{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ は } C^\infty \text{ 級}\}$ と置く．$C^\infty(\mathbb{R})$ は函数の和と定数倍により $\mathbb{R}$-線型空間である．$\lambda \in \mathbb{R}$ とし，$\Phi, \Psi_\lambda \colon C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ を

$$\Phi(f) = Df,$$
$$\Psi_\lambda(f) = Df - \lambda f = (D - \lambda)f$$

によりそれぞれ定める．ここで Df は f の微分である．

1) Φ, Ψ は $\mathbb{R}$-線型写像であることを示せ．従って Φ, Ψ はそれぞれ $C^\infty(\mathbb{R})$ の線型変換である．
2) $\lambda \in \mathbb{R}$ とすると，λ は Φ の固有値であることを示せ．また，固有空間を求め，それが $\operatorname{Ker} \Psi_\lambda$ に等しいことを示せ．

[2] この直和は定義 7.1.1 の直和と関連が深いが，別な物なので注意を要する．問 3.6 も参照のこと．

※ 行列で定まるような線型変換，あるいは有限次元の線型空間の線型変換の固有値は有限個であるが，一般にはそうではないことをこの例は示している．また，固有値の分布が「ばらばら」（離散的，即ち，$\mathbb{R}$ の中に $\mathbb{Z}$ や $\mathbb{Q}$ が含まれているような状況）であるとは限らず，連続的であり得ることも示している[3].

3) V_λ を λ に属する Φ の固有空間とする．$\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ を相異なる実数とすると $V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_r}$ は直和であることを示せ．
※ 2) の結果を用いても良いが，2) の結果を知らなくとも直接示せる．2) を先に解く場合には常微分方程式を解く必要があるが，3) を示すためにはその必要はない．また，3) の結果は無限個の部分線型空間の和空間や直和を適切に定めると同じ形で成り立つ．

問 3.9 (微積分と線型代数が頭のなかで結びついていないと大分難しい). V を実数列全体からなる線型空間とする．また，

$$W = \left\{ \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in V \;\middle|\; \lim_{n \to +\infty} a_n = 0 \right\},$$

$$U = \left\{ \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in V \;\middle|\; \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| < +\infty \right\}$$

$$X = \left\{ \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in V \;\middle|\; \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ と置くと，この級数の収束半径は 1 以上である} \right\}$$

と置く．ただし x^0 は x の値に依らず 1 と定める．

1) W, U はそれぞれ V の部分線型空間であることを示せ．必要であれば微積分学の教科書を参照のこと．
2) $U \subsetneq W \subsetneq V$ が成り立つことを示せ．
3) $f\colon U \to \mathbb{R}$ を $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ について

$$f(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

により定めることができることを示せ（絶対値がついていないのは間違いではない）．このことを f は well-defined であると（日本語の文章であっても）言う．

4) 3) で定めた f は W や V 上では well-defined でないことを示せ．即ち，f は W や V 全体では定義されないことを示せ．
5) X は V の部分線型空間であることを示し，X と U の包含関係について考えよ（結論は明快であるが敢えて示さない．微妙かつ大事なことなのできちんと考えよ）．

[3]函数の空間などを扱うと必ず固有値が連続的になる，ということではない．例えば Schrödinger 方程式はこの問の状況の一般化であるが，必ずしも固有値が連続的ではない場合の良い例である．即ち，水素原子における電子軌道を考える．すると Φ あるいは Ψ_λ にあたる偏微分作用素が定義され，方程式 $\Psi_\lambda(f) = 0$ の解が電子軌道を表す．方程式からすぐには λ に関する情報は得られないが，少し計算をすると λ は離散的であることが（一定の仮定の下で）示される．これが電子軌道の離散的分布に対応する．また，$\Phi(f)$ は電子の持つ軌道エネルギーに直接的に関連する．とはいうものの詳しいことは忘れた．

定義 3.10 (問 1.37 やそれに続く注も参照のこと). $\mathbb{R}^n$ の標準的な座標を $(x_1, \dots, x_n)$ とする.

$$C^\infty(\mathbb{R}^n) = \{f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid f \text{ は } C^\infty \text{ 級}\},$$
$$\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) = \{\mathbb{R}^n \text{ 上の } C^\infty \text{ 級のベクトル場全体}\}$$

と置く[4].

1) $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ について, $\operatorname{grad} f \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ を
$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial x_n}$$
により定める. また, $X = f_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + f_n\frac{\partial}{\partial x_n} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ について $\operatorname{div} X \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ を
$$\operatorname{div} X = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$
により定める.

2) $n = 3$ とする. $X = f_1\frac{\partial}{\partial x_1} + f_2\frac{\partial}{\partial x_2} + f_3\frac{\partial}{\partial x_3} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ について $\operatorname{rot} X \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ を
$$\operatorname{rot} X = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right)\frac{\partial}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right)\frac{\partial}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)\frac{\partial}{\partial x_3}$$
により定める.

問 3.11. 1) $\operatorname{grad}, \operatorname{rot}, \operatorname{div}$ はそれぞれ線型写像であることを示せ.

2) $\mathbb{R}^2$ において $\operatorname{div} \circ \operatorname{grad} = 0$ が成り立つことを示せ.

3) $\mathbb{R}^3$ において $\operatorname{rot} \circ \operatorname{grad} = 0$, $\operatorname{div} \circ \operatorname{rot} = 0$ が成り立つことを示せ.

次が知られている.

定理 3.12 (Poincaré の補題). 1) $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ について $\operatorname{div} X = 0$ が成り立つならば, ある $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ が存在して $X = \operatorname{grad} f$ が成り立つ.

2) $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ について $\operatorname{rot} X = 0$ が成り立つならば, ある $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ が存在して $X = \operatorname{grad} f$ が成り立つ.

3) $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ について $\operatorname{div} X = 0$ が成り立つならば, ある $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ が存在して $X = \operatorname{rot} Y$ が成り立つ.

従って図式

$$0 \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^2) \xrightarrow{\operatorname{grad}} \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2) \xrightarrow{\operatorname{div}} C^\infty(\mathbb{R}^2) \to 0,$$
$$0 \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\operatorname{grad}} \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\operatorname{rot}} \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\operatorname{div}} C^\infty(\mathbb{R}^2) \to 0$$

はそれぞれ完全である. $\mathbb{R}^2$ や $\mathbb{R}^3$ を別な空間, たとえばトーラス（一人用の浮き輪の表面）や, 多人数用の浮き輪の表面などに置き換えても同様の図式を考えることができる. この場合でも問 3.11 に当たる事実は成り立つが, 上の図式は完全ではなくなる. 完全な図式との差は商線型空間 $\operatorname{Ker} \operatorname{div} / \operatorname{Im} \operatorname{grad}$（$n = 2$ の場合）や $\operatorname{Ker} \operatorname{rot} / \operatorname{Im} \operatorname{grad}$, $\operatorname{Ker} \operatorname{div} / \operatorname{Im} \operatorname{rot}$ により表されるが, これらを用いて空間を調べることができる. （以上）

[4] '$\mathfrak{X}$' は X の fraktur 体である.