２０１４年度数学 II（理 I 16,21,22 組向け，足助担当）　演習問題　　’14/6/9（月）

’14/6/10：問 1.3 を修正，定義 1.32 と 1.35 について，やや曖昧な記述があったので加筆修正.
’14/6/11：問 1.37 に加筆.
’14/9/13：問 1.36 1) の誤植を修正.

注意．

- 問題の並びは難易度の順にも，講義で扱った順にも一致していない.
- これはあくまで演習問題であって期末試験の事前公開ではない.
- ヒントを時々附した．原則としてヒントは非自明なことから成る．無条件で認めるのではなく，必ず証明も考えること．ほとんどの場合，ヒントを用いる場合にはその証明は解答には必須である.
- 見れば分かるように問題数は多い．夏休みに解くことを想定している．一方，講義で扱った範囲に鑑みれば問題数は極端に少ない（例えば具体的な行列式の計算などが欠けている）．各自で補うことが望ましい[1].
- 最後の数題は，講義では扱いきれないやや進んだ事柄や，講義の範囲から明確に逸脱した事柄についてのものである．とはいえ，夏学期が終わった時点で必要な知識は全て講義（数学 I を含む）で扱われているはずなので，落着いて考えてみて欲しい.

難しい注意．

- 自分用のノートには全ての証明をつけることを推奨するが，解答としてそれが適切であるかは別問題である．つまり，本来，証明（解答）は過不足（特に不足）無く，簡明・簡潔に述べることが望ましい[2]．これは訓練を要する難しいこと[3]なので最初はとにかく冗長を恐れずに丁寧に証明をつけ，推敲して証明を完成することを強く勧める.
- 解答に当たって，必ずしも講義で扱った順序を意識する必要はない．例えば２章３節で扱ったことを用いて２章２節で扱ったことに関する問に解答しても構わない．ただし，易しい問題を難しい定理を用いて示すようなことは避けること．例えば，$a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ の時 $ax = b$ の解が複素数の範囲で必ず存在することを代数学の基本定理（複素数係数の n 次多項式 f について，方程式 $f(x) = 0$ は重複（重解）を考慮に入れれば必ず n 個の解を複素数の範囲に持つ）を用いて示すようなことは牛刀割鶏あるいは本末転倒であるので避けること．講義や多くの教科書（参考書）の順序は「易しい順」から大きく外れてはいない[4]ので，この意味では参考にするとよい.

---

[1]指定した演習書を推奨するが，その外にも例えば http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/˜asuke/kougi/index.html からリンクを辿ると昨年度以前の演習問題がある（「使い回し」もあるので注意）．今年度の夏学期の講義の範囲は昨年度までの範囲と異なる（一部に入れ替えがある）ので注意すること．また，昨年度までは行列の性質を基に線型代数について論じたが，今年度は線型代数を基に行列の性質を論じているので，結果的に同値ではあるが立場が異なる出題や説明があるので注意すること.

[2]講義では学習（特に復習）の便宜を考え，なるべく全ての事柄について証明を時に「簡明・簡潔」さを犠牲にしてつけている.

[3]仮に数学科に進学したとしても，学部卒業までに習得できれば一つの達成と言える程度には難しい.

[4]自身の講義・教科書については外れていないと認識しているが，異論があれば指摘して欲しい.

以下では特に断らなければ K で $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ を表す.

問 1.1. 次に挙げる $\mathbb{R}^2$ の部分集合が $\mathbb{R}^2$ の $\mathbb{R}$-部分線型空間であるか否か，証明と共に述べよ.

1) $\left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$.
2) $a, b \in \mathbb{R}$ とする．$\left\{ \begin{pmatrix} at \\ bt \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$.
3) $a, b, c \in \mathbb{R}$ とする．$\left\{ \begin{pmatrix} at \\ bt + c \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$.
4) $\left\{ \begin{pmatrix} t \\ t^n \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$．ただし，$n \in \mathbb{N}$ とする．また，ここでは $0 \in \mathbb{N}$ とし，$t \in \mathbb{R}$ によらず $t^0 = 1$ と定める.
5) $\left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{Z} \right\}$.

問 1.2. $V = K^3$ とする．以下に挙げる部分線型空間 W_1, W_2, W_3 の組について，$W_1 + W_2$, $W_1 + W_3$, $W_2 + W_3$, $W_1 + W_2 + W_3$ の基底をそれぞれ一組ずつ求めよ．また，余裕があれば（部分線型空間の）直和の定義を調べ，それぞれが直和であるかどうか調べよ（直和については冬学期に扱うので，無理はしなくて良い）.

1) $W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, $W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, $W_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

2) $W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, $W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $W_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

問 1.3. 1) $\varphi\colon K^{n+1} \to K_n[x] = \{ f \in K[x] \mid f$ は高々 n 次 $\}$ を

$$\varphi \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_0 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_n x^n$$

により定めると φ は K-線型同型写像であることを示し，φ の逆写像を求めよ．また，$\dim K_n[x]$ と，$K_n[x]$ の順序付き基底 $\mathscr{V} = (v_1, \cdots, v_{\dim K_n[x]})$ であって，$f\colon K^{\dim K_n[x]} \to K_n[x]$ を $\lambda \in K^{\dim K_n[x]}$ について

$$f(\lambda) = \sum_{k=1}^{\dim K_n[x]} \lambda_k v_k = \sum_{k=1}^{\dim K_n[x]} v_k \lambda_k$$

と（講義と同様に）定めたとき，$f = \varphi$ が成り立つようなものを全て求めよ.

2) $\psi\colon K^{n+1} \to K_n[x]$ を

$$\psi \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \mu_0 + (\mu_0 + \mu_1)x + (\mu_0 + \mu_1 + \mu_2)x^2 + \cdots + (\mu_0 + \cdots + \mu_n)x^n$$

により定めると ψ は K-線型同型写像であることを示し，ψ の逆写像を求めよ．また，ψ について，1) と同様のことが成り立つような $K_n[x]$ の順序付き基底を全て求めよ．

3) $K_n[x]$ の，1) で求めた順序付き基底を $\mathscr{V}$，2) で求めた順序付き基底を $\mathscr{W}$ とする．$\mathscr{V}$ から $\mathscr{W}$ への基底の変換行列を求めよ．

問 1.4. $K_n[x] = \{f \in K[x] \,|\, f$ は高々 n 次$\}$ とする．$m \in \mathbb{N}$ とし，$\varphi\colon K_n[x] \to K^{m+1}$ を $\varphi(f) = \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(m) \end{pmatrix}$ により定める．φ が線型同型写像になるような m を求めよ．また，そのとき φ が実際に線型同型写像であることを示せ．

問 1.5. 線型写像 $\varphi : K^2 \to K^3$, $\psi : K^3 \to K^3$ をそれぞれ

$$\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ -x+y \\ y \end{pmatrix}, \quad \psi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ 2x+y-3z \\ x-y \end{pmatrix}$$

により定める．

1) $\psi \circ \varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を具体的に計算し，標準的な順序付き基底に関する表現行列を求めよ．
2) $\psi\circ\varphi$，φ，ψ の標準的な順序付き基底に関する表現行列をそれぞれ A, B, C とする．A, B, C を求めよ．また，成分を直接計算することにより $A = CB$ が成り立つことを確かめよ[5]．

問 1.6. $A = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ と置き，K^2 の線型変換 f を $f(\lambda) = A\lambda$ により定める．

1) f の，K^2 の標準的な順序付き基底（$\mathscr{E}$ とする）に関する表現行列を求めよ．
2) $\mathscr{V} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ は K^2 の順序付き基底であることを示せ．

   ※ 順序はつければそれで良いのだから，$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ が基底であるかが問題である．
3) $\mathscr{E}$ から $\mathscr{V}$ への基底の変換行列を求めよ．
4) f の $\mathscr{V}$ に関する表現行列を求めよ．

問 1.7. $V = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \in K^3 \,\middle|\, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \right\}$ と置く．また，K^3 の線型変換 f を $f\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$ により定める．

1) f の，K^3 の標準的な順序付き基底に関する表現行列を求めよ．
2) $f(V) \subset V$ が成り立つことを示せ．
3) V の順序付き基底（$\mathscr{V}$ とする）を一組求め，$\dim V$ を決定せよ．

[5] この講義の立場では $C = BA$ は定義により成り立つが，ここでは行列の積の「公式」を用いて確かめてみよ．

4) 2) により，V の線型変換 g を $g(v) = f(v)$ により定めることができる（g を f の V への**制限**と呼ぶ．$f|_V$ などで表すことが多いが，ここでは g で表す）．g の $\mathscr{V}$ に関する表現行列を求めよ．

5) $\mathscr{V}$ を拡大して得られる K^3 の順序付き基底を一組求めよ．これを $\mathscr{W}$ とし，$\mathscr{W}$ に関する f の表現行列を求めよ．

問 1.8. $a_1, \dots, a_n \in K^n$ とし．$f\colon K^n \to K^n$ を $f(v) = \begin{pmatrix} \det(v\ a_2\ a_3\ \cdots\ a_n) \\ \det(a_1\ v\ a_3\ \cdots\ a_n) \\ \vdots \\ \det(a_1\ \cdots\ a_{n-1}\ v) \end{pmatrix}$ により定める．f は K-線型写像であることを示し，標準的な順序付き基底に関する表現行列を求めよ．

問 1.9. K^3 の部分線型空間 V_1, V_2 を $V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \middle|\ x_1, x_2 \in K \right\}$，$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle|\ x_1, x_2 \in K \right\}$ により定める．

1) K^3 の K-線型変換 f であって，$f(V_1) \subset V_1$，$f(V_2) \subset V_2$ をみたすようなものの（標準的な順序付き基底に関する）表現行列となりうる行列を全て求めよ．

2) K^3 の K-線型変換 f であって，$f(V_1) \subset V_2$，$V_2 \subset \operatorname{Ker} f$ をみたすようなものの（標準的な順序付き基底に関する）表現行列となりうる行列を全て求めよ．

問 1.10. 1) $n > m$ とする．任意の線型写像 $f\colon K^n \to K^m$ について f は単射でないことを示せ．

2) $n < m$ とする．任意の線型写像 $f\colon K^n \to K^m$ について f は全射でないことを示せ．

問 1.11. 1) $f\colon K^8 \to K^3$ を

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + 3x_4 + x_7 + 3x_8 \\ x_3 + 2x_4 + x_6 - x_8 \\ x_5 + 2x_6 + x_8 \end{pmatrix}$$

により定める．

a) $\operatorname{Ker} f$ と $\operatorname{Im} f$ の基底をそれぞれ一組ずつ求め，またそれぞれの次元を決定せよ．
ヒント：$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = 8$ が成り立つ（何故か？）

b) $\{v_1, \dots, v_r\}$，$r = \dim \operatorname{Ker} f$，を $\operatorname{Ker} f$ の基底とする（a) で求めたものとは限らない）．これを（任意に）拡大して得た K^8 の基底 $\{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_8\}$ について，$\{f(v_{r+1}), \dots, f(v_8)\}$ は $\operatorname{Im} f$ の基底であることを示せ（$r = 8$ の場合には $\operatorname{Im} f = \{o\}$ であることを示せ）．

c) a) で求めた $\operatorname{Ker} f$ 及び $\operatorname{Im} f$ の基底をそれぞれ $\{v_1, \dots, v_r\}$, $\{w_1, \dots, w_s\}$ とする．$\operatorname{Ker} f$ の基底を拡大して得られる K^8 の基底 $\{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_8\}$ であって，$f(v_{r+k}) = w_k$（$k = 1, \dots, 8 - r$）が成り立つものを一組求めよ．

2) $g\colon \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^3$ を

$$g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + \sqrt{-1}x_3 + x_5 \\ x_2 - 2x_3 \\ x_4 - 3\sqrt{-1}x_5 \end{pmatrix}$$

このとき，$\operatorname{Ker} g$ と $\operatorname{Im} g$ の基底をそれぞれ一組ずつ求め，またそれぞれの次元を決定せよ．

定義. f を $\mathbb{R}$ 上定義された実数値函数とする．f が**奇函数**であるとは任意の $x \in \mathbb{R}$ について $f(-x) = -f(x)$ が成り立つことをいい，また，f が**偶函数**であるとは任意の $x \in \mathbb{R}$ について $f(-x) = f(x)$ が成り立つことをいう．

問 1.12. $W = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f \text{ は奇函数}\}$，$U = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f \text{ は偶函数}\}$ と置く．

1) W と U は共に $\mathbb{R}[x]$ の部分線型空間であることを示せ[6]．
2) $\mathbb{R}[x] = W + U$ と，$W \cap U = \{o\}$ がそれぞれ成り立つことを示せ．
3) $f \in \mathbb{R}[x]$ の時，$g \in W$ と $h \in U$ がそれぞれ唯一つ存在して $f = g + h$ が成り立つことを示せ．
   ヒント：g と h は f を用いて簡潔に表せる．また，2) の解き方によっては 3) も同時に解ける．
4) $V = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ は } C^\infty \text{ 級}\}$ として W, U をそれぞれ C^∞ 級の奇函数，偶函数からなる V の部分線型空間とすると，1) から 3) と同様のことが成り立つことを示せ．
   注：V の元はテーラー展開可能とは限らないので，あまり安直に考えるわけにはいかない．

問 1.13 (少し脱線). $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を実数値函数とする．

1) $g(x) = f(x^2)$ とすると $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は偶函数であることを示せ．
2) $h(x) = xf(x^2)$ とすると $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は奇函数であることを示せ．

問 1.14. V, W を K-線型空間，U を V の，X を W のそれぞれ K-部分線型空間とする．また，$f\colon V \to W$ を K-線型写像とする．

1) $f^{-1}(f(U)) = U + \operatorname{Ker} f$ が成り立つことを示せ．
2) $f(f^{-1}(X)) = X \cap \operatorname{Im} f$ が成り立つことを示せ．

問 1.15. V を K-線型空間とする．また，f を V の K-線型変換とする．$f \circ f = f$ が成り立つとき，以下が成り立つことを示せ．

1) $g = \mathrm{id}_V - f$ と置くと，$g \circ f = f \circ g = 0$ が成り立つことを示せ．
2) $g \circ g = g$ が成り立つことを示せ．

[6] W や U がどのような多項式（元）からなるか決定してしまってから示すこともできるが，実はそのような作業は不要である．これは 2) 以降についても同様である．まずは（このことは気にせずに）正しい証明をつけることが大切であるが，それができたら W や U の（元の）具体的な形に頼らない証明も考えてみよ．

3) $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} g$ が成り立つことを示せ.

4) $V = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$ と $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{o\}$ がそれぞれ成り立つことを示せ.

問 1.16. 1) $A \in M_n(K)$ とし，A は上三角行列であるとする．$\exists k \in \mathbb{N},\ k > 0$ s.t. $A^k = O_n$ が成り立つならば，$A^n = O_n$ が成り立つことを示せ.

2) $A \in M_n(\mathbb{C})$ であれば，ある $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ について $P^{-1}AP$ は上三角行列である（後期に示す）．$A \in M_n(\mathbb{C})$ について，$\exists k \in \mathbb{N}, k > 0$ s.t. $A^k = O_n$ が成り立つならば，$A^n = O_n$ が成り立つことを示せ.

問 1.17. 次の方程式の解空間を

$$\{v \in K^n \,|\, \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K,\ v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r + v_0\}$$

の形に表せ．ただし，$v_1, \ldots, v_r$ は

1) 方程式が斉次である場合には解空間の基底となるように,

2) 方程式が非斉次である場合には，随伴する斉次方程式の解空間の基底となるように

それぞれ定めること.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 2 & 8 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$,
ただし $a, b \in K$

8) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

問 1.18. 次の連立一次方程式をクラメルの公式を用いる方法と，掃き出しを用いる方法の二通りで解け．

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 7x_3 = -1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 2, \\ 5x_1 + 10x_2 + 16x_3 = 4 \end{cases}$$

問 1.19. 以下の行列の逆行列が存在するかどうか判定し，存在するならばそれを求めよ．
また，各々の行列の rank（ランク・階数）を求めよ．

1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \\ 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{-1} & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3+\sqrt{-1} & \sqrt{-1} & 3+3\sqrt{-1} \\ 2 & 0 & 3-3\sqrt{-1} & 9 & 3-3\sqrt{-1} \end{pmatrix}$

問 1.20. $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ とする．

1) A の第 i 行と第 j 行（$i \neq j$）を入れ替えて得られる行列の逆行列を B とする．B と A^{-1} の関係を簡潔に述べよ．
2) 1) の事実を基本行列を用いて表せ（解き方によっては 1) と 2) は同時に解ける）．

問 1.21. $A \in M_n(K)$ とし，$F\colon M_n(K) \to K$ を $X \in M_n(K)$ について $X = (x_1 \ \cdots \ x_n)$ と列ベクトルを用いて表し，

$$F(X) = \det(Ax_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n) + \det(x_1 \ Ax_2 \ x_3 \ \cdots \ x_n) + \cdots + \det(x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_{n-1} \ Ax_n)$$

と置くことにより定める．このとき，$F(X) = (\mathrm{tr}\, A) \det X$ が成り立つことを示せ．ここで $\mathrm{tr}\, A$ は A の対角成分の和である．

$\mathbb{R}^n$ や $M_n(\mathbb{R})$ に値を取る $\mathbb{R}$ 上定義された函数の微分を，成分ごとに一斉に微分を取ることにより定める．なお，ここでは微分可能性に関しては考察しなくて良い．

問 1.22. X を $M_n(\mathbb{R})$ に値を取る $\mathbb{R}$ 上定義された C^∞ 級の（無限回連続微分可能な）函数とする．なお，変数は t とする．$X = (x_1 \cdots x_n)$ と，$\mathbb{R}^n$ に値をとる C^∞ 級の函数 $x_1,\ldots,x_n$ を用いて表したとき，ある $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ が存在し，

$$\frac{d}{dt} x_i = Ax_i$$

が全ての i について成り立つとする．ここで $f(t) = \det X(t)$ と定めると $\dfrac{df}{dt}(t) = (\mathrm{tr}\, A) f(t)$ が成り立つことを示せ．

問 1.23. $A \in M_{m,n}(K)$ とする．$i_1 < i_2 < \cdots < i_r$，$j_1 < j_2 < \cdots < j_r$ を正の整数とし，A から第 i_1 行，…，第 i_r 行および第 j_1 列，…，第 j_r 列を取り出して（取り去るのではない）得られる $M_r(K)$ の元を $A_{i_1,\cdots,i_r;j_1,\cdots,j_r}$ で表す（このような行列を r 次小行列などと呼ぶことがある）．ある $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$，$j_1 < j_2 < \cdots < j_r$ について $\det A_{i_1,\cdots,i_r;j_1,\cdots,j_r} \neq 0$ であることと，$\mathrm{rank}\, A \geq r$ であることは同値であることを示せ．

ヒント：r 個の列を選び出すには，行列のランクと，行列により定まる線型写像の像の次元との関係に着目するのがよい．行を選び出すには，例えば行列のランクは転置を取る操作で不変であることを用いるとよい．双対空間について知っていれば転置を取らずとも議論ができる[7]．あるいは一切を行列の基本変形により処理することもできる．この場合には基本変形により行列のランクは不変であることが効く．

問 1.24. $A \in M_{m,n}(K)$ とし，$A = (a_1, \ldots, a_n)$ と K^m の元 $a_1, \ldots, a_n$ を用いて表す．$\mathrm{rank}\, A = n-1$ かつ $\mathrm{rank}\,(a_1, \ldots, a_{n-1}) = n-1$ が成り立つならば，適当な $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \in K$ が存在して $a_n = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_{n-1} a_{n-1}$ が成り立つことを示せ．

ヒント：行列の階数と，行列により定まる線型写像の像の次元との関係を思い出してみよ．なお，本問は行列の基本変形に着目しても解ける．この場合には例えば $A = (a_1 \ \cdots \ a_{n-1} \,|\, a_n)$ と区分けし次のような右基本変形を考えてみよ．まず A の左側の部分を列階段行列（普段考える階段行列の転置の形をしたもの）に変形し，その上で A 全体を列階段行列に変形する．特に二番目の段階でどのような変形をするのかよく観察してみよ．

問 1.25. $A \in M_n(K)$ とする．A の余因子行列を $\widetilde{A}$ で表す．

1) $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ であるとき，$\det \widetilde{A}$ を求めよ．
2) $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ であるとき，$\widetilde{(\widetilde{A})} = (\det A)^{n-2} A$ が成り立つことを示せ．
3) $n > 2$ とする．$A \notin \mathrm{GL}_n(K)$ のとき，$\widetilde{(\widetilde{A})} = O_n$ であることを示せ．

ヒント：（少なくとも）二通りの方針があり得る．例えばまず $\mathrm{rank}\, A$ により場合分けをする．$\mathrm{rank}\, A < n-1$ の時には問 1.23 を用いれば $\widetilde{A} = O_n$ であることが容易に示せる．$\mathrm{rank}\, A = n-1$ の時には問 1.24 と行列式の性質を用いると $\widetilde{A}$ が特別な形をしていることがわかり，$\mathrm{rank}\, A < n-1$ の場合に帰着できる．あるいは 2) に着目して，まず対応 $A \mapsto \widetilde{(\widetilde{A})}$ が $A \in M_n(K)$ の函数として（つまり n^2 個の変数の函数として）連続であることを示す．一方，任意の $A \in M_n(K)$ についてある正則な行列の列 $\{A_n\}_{n=1,2,\ldots,}$ であって $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ なるものが存在することを示す．これらのことから主張を示すことができる（多変数の函数の連続性について未習である場合には，後者の方針で厳密に証明するのは難しいので，収束等については今のところはある程度大雑把に議論すればよい）[8]．

問 1.26. $A \in M_n(\mathbb{C})$ とする．$c_0(A) = 1$ とし，$c_1(A), \ldots, c_n(A) \in \mathbb{C}$ を条件

$$\det\left(tE_n + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} A\right) = t^n + c_1(A) t^{n-1} + \cdots + c_n(A)$$

により定める．また，$k < 0$ あるいは $k > n$ であるときには $c_k(A) = 0$ と定める．

1) $c_1(A)$ を $\mathrm{tr}\, A$ を用いて表せ．また，$c_n(A)$ を $\det A$ を用いて表せ．

---

[7]線型代数を基礎において行列の性質はその表れとする本講義の態度からはこちらが本筋である．参考書では行列の性質を基に線型代数について議論していて，逆である．

[8]ただし，後者の方針で示した場合次のような問題が残る．主張は $K = \mathbb{R}$ あるいは $K = \mathbb{C}$ でなくとも，K が体であれば成り立つ．前者の方針で示した場合には，うまく証明すればそのまま一般の K の場合の証明に読み替えることができるが，後者の方針で示した場合には一般の K についても主張を示すには工夫がいる．

2) $A_1 \in M_{n_1}(\mathbb{C})$，$A_2 \in M_{n_2}(\mathbb{C})$ について $A = A_1 \oplus A_2 = \begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix}$ が成り立つとする．このとき，$c_k(A) = \sum_{i=0}^{k} c_i(A_1)c_{k-i}(A_2)$ が成り立つことを示せ.

問 1.27. $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ について $\|A\| = \sqrt{\mathrm{tr}({}^tAA)}$，$\|A\|_\infty = \sqrt{mn}\max_{i,j}|a_{ij}|$ とそれぞれ置く．ここで $\mathrm{tr}\,X$ は X の対角成分の和を表す.

1) $\|A\|$ を A の成分を用いて表せ.
2) $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$，$\lambda \in \mathbb{R}$ について $\|A+B\|_\infty \leq \|A\|_\infty + \|B\|_\infty$，$\|\lambda A\|_\infty = |\lambda|\,\|A\|_\infty$ が成り立つことを示せ.
3) $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ について，$\|A\|_\infty = 0$ であることと，$A = O_{m,n}$ であることは同値であることを示せ.
4) $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$，$B \in M_{n,l}(\mathbb{R})$ について $\|AB\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|B\|_\infty$ が成り立つことを示せ.
5) $\|\cdot\|$ について，2) から 4) と同様のことが成り立つことを示せ.
6) $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ について，$\dfrac{1}{\sqrt{mn}}\|A\|_\infty \leq \|A\| \leq \|A\|_\infty$ が成り立つことを示せ.

問 1.28. 1) $A \in M_n(\mathbb{R})$ とする．$\forall \epsilon > 0\ \exists\, X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ s.t. $\|X - A\| < \epsilon$ が成り立つことを示せ.

2) $\forall\, A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\ \exists \delta > 0$ s.t. $X \in M_n(\mathbb{R})$, $\|X - A\| < \delta \Rightarrow X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ が成り立つことを示せ.

ヒント：最初は上三角行列について考えてみよ.

問 1.29. $A \in M_n(K)$ を $A = \begin{pmatrix} A' & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と $A' \in M_{n-1}(K)$ であるように区分けする．$A' \in \mathrm{GL}_{n-1}(K)$ のとき，

$$L = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ c & d' \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} E_{n-1} & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が $A = LU$ を充たすように b'，d' を定めよ.

問 1.30. $A \in M_n(K)$ とする．A の第 1 行から第 k 行，第 1 列から第 k 列までを取り出して得られる行列を $A_k \in M_k(K)$ とする（A_k を第 k 主座小行列と呼ぶ）．もし $A_1, \ldots, A_n (= A)$ が全て正則であるとすると，対角成分が全て 1 であるような上三角行列 U と，正則な下三角行列 L がただ一組存在して $A = LU$ が成り立つことを示せ（例えば以下のように示せる）．これを **LU 分解**と呼ぶ.

存在の証明.

1) $n = 1$ の時は $U = (1)$, $L = A$ とすればよい.
2) 条件を充たすような n 次以下の行列について分解が存在したとし，$A \in \mathrm{GL}_{n+1}(K)$ であって，A も条件を充たすとする．$A = \begin{pmatrix} A' & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と $A' \in M_n(K)$ であるように区分けする．$A' = A_n$ なので，仮定から A' は正則である．前問を用いて $A = L_1U_1$ と

すると，L_1 の第 n 主座小行列は帰納法の仮定から LU 分解可能である（証明は必要である）．このことを用いてまず L_1 が LU 分解可能であることを示し，それから A 自身が LU 分解可能であることを示す.

一意性の証明．$A = LU = L'U'$ を共に LU 分解とする．このとき，$L'^{-1}L = U'U^{-1}$ が成り立つ．両辺が共に E_n に等しいことを $L'^{-1}L$, $U'U^{-1}$ の形に着目して示す.

問 1.31. 以下の行列のそれぞれについて，LU 分解を求めよ.

$$1)\ \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad 2)\ \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 6 \\ -1 & 6 & 11 \end{pmatrix} \qquad 3)\ \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

ここからは大切であるが，やや進んだ事柄になるので後回しにしても良い[9].

定義 1.32. V, W, U を K-線型空間，$f\colon V \to W$ を K-線型写像とする．$f^*\colon \mathrm{Hom}_K(W,U) \to \mathrm{Hom}_K(V,U)$ を

$$f^*(\varphi) = \varphi \circ f$$

により定め，$f^*(\varphi)$ を φ の f による**引き戻し** (pull-back) と呼ぶ．$f^*(\varphi)$ はしばしば単に $f^*\varphi$ で表される.

※ U が異なると f^* は異なる（定義域が異なる）写像であるが，特に記号を変えないのが通例である.

問 1.33. 1) f^* は well-defined であって（きちんと定まっていて），K-線型写像であることを示せ.

2) V, W, U, X を K-線型空間，$f\colon V \to W$, $g\colon W \to X$ を K-線型写像とする．$f^*\colon \mathrm{Hom}_K(W,U) \to \mathrm{Hom}_K(V,U)$, $g^*\colon \mathrm{Hom}_K(X,U) \to \mathrm{Hom}_K(W,U)$ について

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$$

が成り立つことを示せ.

問 1.34. V を n 次元 K-線型空間とし，$\{v_1, \dots, v_n\}$ を V の基底とする．$\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathrm{Hom}_K(V,K) = V^*$ を条件

$$(*) \qquad \gamma_i(v_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

により定める（$1 \leq i \leq n$）.

1) γ_i は well-defined であることを示せ．即ち，条件 $(*)$ をみたす V^* の元が唯一つ定まることを示せ.

[9] 数学を「使う」立場からは不要にも思えるかもしれないが，熱方程式や波動方程式などを解こうとして「超函数」（例えばインパルス応答などに現れる，ディラック（の）δ 函数など）などを使い始めると本質的に現れる（余りに本質的なので明示されない）．なお,「超函数」は物理（学的な理由）で発見されたものである.「有用」な事柄は数学的にはしばしば難しい.

2) $\{\gamma_1,\dots,\gamma_n\}$ は V^* の基底であることを示せ．

定義 1.35. V の基底 $\mathscr{V}=\{v_1,\dots,v_n\}$ から問 1.34 のようにして定まる V^* の基底を V^* の $\mathscr{V}$ の**双対基底**あるいは $\mathscr{V}$ に**双対な基底**（basis dual to $\mathscr{V}$）と呼ぶ．また，順序付き基底 $(v_1,\dots,v_n)$ の双対基底には自然な順序を与え，$(\gamma_1,\dots,\gamma_n)$ を考える．特に $V=K^n$ であって，$\mathscr{V}$ が標準的な基底であるとき，$\mathscr{V}^*$ を $(K^n)^*$ の標準的な（双対）基底と呼ぶ．順序付き基底に関しても同様である．

問 1.36. 1) $\mathscr{V},\mathscr{W}$ をそれぞれ K^n, K^m の標準的な順序付き基底，$\mathscr{V}^*,\mathscr{W}^*$ をそれぞれ $(K^n)^*$, $(K^m)^*$ の，$\mathscr{V},\mathscr{W}$ の標準的な順序付き（双対）基底とする．$f\colon K^n\to K^m$ を K-線型写像とし，A を f の $(\mathscr{V},\mathscr{W})$ に関する表現行列とする．このとき，$f^*\colon (K^m)^*\to(K^n)^*$ の，$(\mathscr{W}^*,\mathscr{V}^*)$ に関する表現行列は ${}^tA$ で与えられることを示せ．

2) V,W をそれぞれ n 次元，m 次元の K-線型空間とする．$\mathscr{V},\mathscr{W}$ をそれぞれ V,W の順序付き基底，$\mathscr{V}^*,\mathscr{W}^*$ をそれぞれ V^*,W^* の，$\mathscr{V},\mathscr{W}$ の双対（順序付き）基底とする．$f\colon V\to W$ を K-線型写像とし，A を f の $(\mathscr{V},\mathscr{W})$ に関する表現行列とする．このとき，$f^*\colon W^*\to V^*$ の，$(\mathscr{W}^*,\mathscr{V}^*)$ に関する表現行列は ${}^tA$ で与えられることを示せ．

※ もちろん 2) は 1) の一般化である．こちらを先に解いてしまい，1) を 2) から導いても構わない．

以下の問は数理科学 I，II や III で扱うことに関するものである．これまでの講義で扱った事柄と，数学 I で夏学期に扱う事柄が整理できていれば易しいことであるが，現時点ではまだ難しいかもしれない．

問 1.37. $\mathbb{R}^2$ の各点 p について $\mathbb{R}^2$ をそれぞれ考えることにして，$T_p\mathbb{R}^2$ で表すことにする．記号はともかく，$T_p\mathbb{R}^2=\mathbb{R}^2$ である．$T_p\mathbb{R}^2$ の元 v を，p を始点とするベクトルと考える（あるいは p を無理矢理原点と考える）ことにして，$T_p\mathbb{R}^2$ の元を p におけるベクトルと考え，**p における $\mathbb{R}^2$ の接ベクトル**と呼ぶ．$T_p\mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ と看做したときの標準的な順序付き基底を $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}_p, \frac{\partial}{\partial x_2}_p\right\}$ とする[10]．そして $T\mathbb{R}^2=\bigcup_{p\in\mathbb{R}^2} T_p\mathbb{R}^2$ と置く（和集合の記号を用いているが，$p\neq q$ ならば $T_p\mathbb{R}^2$ と $T_q\mathbb{R}^2$ は別物なので $T_p\mathbb{R}^2\cap T_q\mathbb{R}^2=\varnothing$ である）．$f,g\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を C^∞ 級の函数とし，$X\colon\mathbb{R}^2\to T\mathbb{R}^2$ を

$$X(p)=f(p)\frac{\partial}{\partial x_1}_p+g(p)\frac{\partial}{\partial x_2}_p$$

により定める．このような X は $\mathbb{R}^2$ 上の C^∞ 級の（接）**ベクトル場**と呼ばれる．$X(p)$ は X_p でも表す．また，$X=f\frac{\partial}{\partial x_1}+g\frac{\partial}{\partial x_2}$ とも表す．

注. 記号 $\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2}$ は偏微分の記号と紛らわしいが，これはわざとそうしている．実際，4) で定めるように接ベクトルによる函数の微分が定まる．また，ここでは扱わないが,（接）ベクトル

---

[10] x_1,x_2 の代わりに x^1,x^2 を用いて $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}_p,\frac{\partial}{\partial x^2}_p\right\}$ とするほうが「行儀がよい」．ただし，冪乗との記法上の相性は当然悪くなる．

場が与えられれば接ベクトルが平面全体で与えられていると考えることができるので,（接）ベクトル場による函数の微分を定めることもできる.

1) 各 $p \in \mathbb{R}^2$ について $T_p\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$ の和・定数倍を用いることにより，$\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場全体のなす集合は（自然な）$\mathbb{R}$-線型空間の構造を持つことを示せ.

$i = 1, 2$ について $(dx_i)_p\colon T_p\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を条件

$$(dx_i)_p\left(\frac{\partial}{\partial x_j}_p\right) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

により定める．即ち，$\{(dx_1)_p, (dx_2)_p\}$ を $(T_p\mathbb{R}^2)^*$ の，$\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}_p, \frac{\partial}{\partial x_2}_p\right\}$ に双対な基底とする．ここで $T^*\mathbb{R}^2 = \bigcup_{p\in\mathbb{R}^2} (T_p\mathbb{R}^2)^*$ と置く（$p \neq q$ ならば $(T_p\mathbb{R}^2)^* \cap (T_q\mathbb{R}^2)^* = \varnothing$ である）．$(T_p\mathbb{R}^2)^*$ の元は **p における $\mathbb{R}^2$ の余接ベクトル**と呼ばれる．$f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級の函数とし，$\omega\colon \mathbb{R}^2 \to T^*\mathbb{R}^2$ を

$$\omega(p) = f(p)(dx_1)_p + g(p)(dx_2)_p$$

により定める．このような ω は $\mathbb{R}^2$ 上の C^∞ 級の **1-形式**，微分 1-形式と呼ばれる．$\omega(p)$ は ω_p でも表す．また，$\omega = f dx_1 + g dx_2$ とも表す.

注. 記号 dx_1, dx_2 は積分に現れる記号と紛らわしいが，これはわざとそうしている．実際，1-形式の「線積分」を定めることができて，その際 dx_1 や dx_2 は積分に現れる同様の記号とよく似た役割を果たす．また，1-形式は全微分方程式とも関連する.

2) 各 $p \in \mathbb{R}^2$ について $(T_p\mathbb{R}^2)^* = (\mathbb{R}^2)^*$ の和・定数倍を用いることにより，$\mathbb{R}^2$ 上の 1-形式全体のなす集合は（自然な）$\mathbb{R}$-線型空間の構造を持つことを示せ.
3) X を $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場，ω を $\mathbb{R}^2$ 上の 1-形式とする．$\omega(X)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を $\omega(X)(p) = \omega_p(X_p)$ により定めると $\omega(X)$ は $\mathbb{R}^2$ 上の C^∞ 級函数であることを示せ.
4) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級の函数とする．f の**勾配ベクトル場** $\mathrm{grad}\, f$ を

$$(\mathrm{grad}\, f)_p = \frac{\partial f}{\partial x_1}(p)\frac{\partial}{\partial x_1}_p + \frac{\partial f}{\partial x_2}(p)\frac{\partial}{\partial x_2}_p$$

により定める．また，$v = a\frac{\partial}{\partial x_1}_p + b\frac{\partial}{\partial x_2}_p \in T_p\mathbb{R}^2$ について

$$v(f) = a\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) + b\frac{\partial f}{\partial x_2}(p)$$

とおいて f の v による**微分**と呼ぶ．$\|v\|_p = \sqrt{a^2 + b^2}$ と置き，$\|v\| = 1$ と仮定する．このとき，$|v(f)|$ が最大値をとるのは v が $(\mathrm{grad}\, f)_p$ の定数倍となるとき，その時に限ることを示せ.

ヒント：詳しくは冬学期に扱う内積に関わる問題であるが，高校までの知識で解ける．$v(f)$ を v と $(\mathrm{grad}\, f)_p$ の内積と見ることができることに注意せよ.

（以上）