２０１３年度数学 II 演習（理 I 37–39 組）　第７回　　　　　　　　'13/7/9（火）４限
訂正:'13/7/9 問 7.6 を修正.

以下では特に断らない限り $K=\mathbb{R}$ もしくは $K=\mathbb{C}$ とする.

注. １．発表に限らず，解答を作成する際には「明らか」乃至これに類する文言は原則として用いないこと.
２．よく分からなくなってしまったら，まずは K を $\mathbb{R}$ と読み替え，K^n は $\mathbb{R}^n$ あるいは $\mathbb{R}^2$，$\mathbb{R}^3$ 位に考えておき，改めて一般の場合を考えてみよ.
３．ヒントに主張が含まれる場合，多くのものは非自明であるからきちんと証明すること.

問 7.1，7.2 は問 3.10，3.11 と関連が深い（一部の小問はほぼ同一である）．単に解くだけでなく，比較してみるとよい.

問 7.1. K^n の元 $v=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ に関する一次方程式系

$$(*)\qquad \begin{cases} a_{11}v_1+a_{12}v_2+\cdots+a_{1n}v_n=c_1 \\ a_{21}v_1+a_{22}v_2+\cdots+a_{2n}v_n=c_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}v_1+a_{m2}v_2+\cdots+a_{mn}v_n=c_m \end{cases}$$

を考え，解空間を $V=V_c$ とする．$V\subset K^n$ である.

以下では A を方程式 $(*)$ の係数行列とする．つまり，$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ と置く．また，$c=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$ とする．最後に，$f\colon K^n\to K^m$ を

$$f\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

により定める.

1) $V\neq\varnothing$ とする．V が線型空間であることと，$c=0$ が成り立つことは同値であることを示せ.
2) $V=f^{-1}(\{c\})$ が成り立つことを示せ．また，$f^{-1}(\{0\})=\operatorname{Ker} f$ であることを確かめよ.
※ $c\in K^m$ について $f^{-1}(\{c\})=\{v\in K^n \mid f(v)=c\}$ であった.

3) $V=V_c\neq\varnothing$ が成り立つことと，$c\in\operatorname{Im}f$ が成り立つことは同値であることを示せ.

・以下では $c=0$ とする．従って $V\neq\varnothing$ であって V は線型空間である.

4) $(*)$ に更に $b_1v_1+b_2v_2+\cdots+b_nv_n=0$ という条件を付け加えた一次方程式系を考え，その解空間を W と置く．このとき，W は V の部分線型空間であることを示せ.

5) 4) のように W を定める．以下の条件は同値であることを示せ.

a) $V=W$ が成り立つ.

b) $\dim V=\dim W$ が成り立つ.

c)

$$\forall v=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{pmatrix}\in V,\ b_1v_1+b_2v_2+\cdots+b_nv_n=0$$

が成り立つ.

d) $A'\in M_{m+1,n}(K)$ を $A'=\begin{pmatrix}A\\b\end{pmatrix}$ により定めると $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}A'$ が成り立つ.

・5) の同値な条件が成り立つような $(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ の全体のなす $M_{1n}(K)$ の部分集合を U とする.

6) U は $M_{1n}(K)$ の部分線型空間であることを示せ.
ヒント：例えば $(b_1+b_1',b_2+b_2',\ldots,b_n+b_n')\in U$ とはどのような意味であるのか考えてみよ.

7) $U=\langle a_1,\ldots,a_m\rangle$ が成り立つ，即ち，U は $a_1,\ldots,a_m$ で生成されることを以下のように示せ.

7-1) $U'=\langle a_1,a_2,\ldots,a_m\rangle$ とすると $U'\subset U$ が成り立つことを示せ.

7-2) $U\supsetneq U'$ であったとして, $u\in U\setminus U'$ とする．つまり $u\in U$ であって $u\notin U'$ であるとする．A の下に更に u を並べた行列を $A'=\begin{pmatrix}A\\u\end{pmatrix}$ とすると，$\operatorname{rank}A'=\operatorname{rank}A+1$ が成り立つことを示せ.

7-3) 引き続き $U\supsetneq U'$ とする．このとき，$\dim\{v\in K^n\mid Av=0\}=n-\operatorname{rank}A$ が成り立つ（なぜか？）が，一方 $\{v\in K^n\mid Av=0\}=\{v\in K^n\mid A'v=0\}$ が成り立つことを示し，矛盾を導け.
ヒント：そもそも $u\in U$ とは何を意味していたのか考えてみよ.

8) 7) の結果を用いて $\dim U=\operatorname{rank}A$ が成り立つことを示せ.

問 7.2 (技術的にというよりも,「頭の体操」的な難しさがある).

$A\in M_{m,n}(K)$ とし，$f\colon K^n\to K^m$ を $f(v)=Av$ により定める．方程式 $Av=c$ の解空間を V_c と置く．$V_c=f^{-1}(\{c\})=\{v\in K^n\mid Av=c\}$ である．特に，$\operatorname{Ker}f=V_0\subset K^n$ は方程式 $Av=0$ の解空間である．問 7.1 の 3) によれば $V_c\neq\varnothing$ であることと，$c\in\operatorname{Im}f$ であることは同値である.

さて，$c \in \operatorname{Im} f$ の時，V_c を $[c]$ で表すことにして，$W = \{[c] \mid c \in \operatorname{Im} f\}$ と置く．$[c]$ は空間（集合）ではあるが，W の元として点のように考える．ここで W に和と定数倍をそれぞれ次のように定める．

a) $p_1, p_2 \in W$ について，$p_1 = [c_1]$, $p_2 = [c_2]$ と $c_1, c_2 \in \operatorname{Im} f$ を用いて表し，$p_1+p_2 = [c_1+c_2]$ と定める（$c_1 + c_2 \in \operatorname{Im} f$ であることに注意せよ）．

b) $p \in W,\ \lambda \in K$ について，$p = [c],\ c \in \operatorname{Im} f$ と表して $\lambda p = [\lambda c]$ と定める．

2) W はこれらの演算により線型空間であることを示せ．

ここで $\varphi\colon \operatorname{Im} f \to W$ を $\varphi(c) = [c]$ により定める．

3) φ は線型写像であることを示せ．

4) φ は線型同型写像であることを示せ．
ヒント：ぎょっとするかもしれないが，実はとても簡単である．

W における演算の意味を幾何学的に考えてみる．

5) $K^n = \bigcup_{c \in \operatorname{Im} f} V_c$ が成り立ち，また，$V_c \cap V_{c'} \neq \varnothing$ ならば $c = c' \in \operatorname{Im} f$ が成り立つことを示せ（したがって，このとき $V_c = V_{c'}$ である）．

$V = \operatorname{Ker} f$ とする．$u \in K^n$ について $V(u) = \{w \in K^n \mid \exists v \in V \ \text{ s.t. } w = v + u\}$ と置く．幾何的には，$V(u)$ は V を u だけ平行移動して得られる K^n の部分集合である．

6) $V(u) = V_{f(u)}$ が成り立つことを示せ．従って $V(u) = [f(u)]$ が成り立ち，$V(u) \in W$ と看做すことができる．

7) $V(u) = V(u')$ が成り立つことと，$u - u' \in V = \operatorname{Ker} f$ が成り立つことは同値であることを示せ．

$V(u)$ を $[f(u)]$ と看做すことで $V(u) \in W$ と考えることができるが，この対応を用いる際には次のような注意が必要である．例えば W における演算を，元を $V(u)$ と，$u \in K^n$ を用いて表してから，u を含んだ式により定めるとする．ここで，$V(u) = V(u')$ と $u - u' \in \operatorname{Ker} f$ は同値なので，全く同じ演算に於いて u を u' に取り替えても同じ結果が得られないと，それは $V(u) = V(u')$ により定まったとは言えない．例えば $V(u_1)$ と $V(u_2)$ の「和」を $V(u_1) + V(u_2) = V(u_1 + u_2)$ により定めてみる（和を表す記号は和空間の記号と同一であるが，もちろん意味は異なるので注意せよ）．$V(u_1) = V(u_1'),\ V(u_2) = V(u_2')$ であるとき，$V(u_1 + u_2) = V(u_1' + u_2')$ でなければ困る．実際，この「和」がうまくいっているとすると

$$V(u_1' + u_2') = V(u_1') + V(u_2') = V(u_1) + V(u_2) = V(u_1 + u_2)$$

が成り立つはずである．逆にこれが常に成り立つのであれば，$V(u_1)+V(u_2) = V(u_1+u_2)$ と定めるとうまくいっている（well-defined である，と日本語の文章でも言う）．

8) $V(u_1) + V(u_2) = V(u_1 + u_2)$ とすると，これは well-defined であることを示せ．即ち，$V(u_1) = V(u_1'),\ V(u_2) = V(u_2')$ であるとき，$V(u_1 + u_2) = V(u_1' + u_2')$ が成り立つことを示せ．

$u \in K^n,\ \lambda \in K$ について $\lambda V(u) = V(\lambda u)$ により定数倍を定める．

9) 定数倍は well-defined であることを示せ．

10) 上のように定めた和と定数倍は 6) により $V(u), V(u') \in W$ と看做すと，W における和と定数倍とそれぞれ一致することを示せ．

まとめると，

a) W は $Av = c$（$c \in \operatorname{Im} f$）の解空間 V_c を点 $[c]$ と考え，c を $\operatorname{Im} f$ 全体を動かして得られる空間であって，

b) W における和，定数倍は，V_c を $V_c = V(u),\ c = f(u)$ と表して，V からの「ずれ」に注目して定めた．$V_c = V(u)$ と表す方法は（$c \in \operatorname{Im} f$ が与えられたとき，u を定める方法は）一意的とは限らないが，それは問題ない，

と考えることができる．

最後に，同型 $\varphi\colon \operatorname{Im} f \to W$ の意味について考える．$F'\colon W \to \operatorname{Im} f$ を $F'([c]) = c$ により定める．これは φ の逆写像である．F' を対応 $[c] = V(u)$（$c = f(u)$）を用いて，$V(u)$ を用いて表してみる．つまり，何らかの写像 $F\colon V(u) \mapsto \operatorname{Im} f$ であって[†1]，$F = F'$ であるようなものを見つけたい．そこで $U = \{V(u) \mid u \in K^n\}$ と置く．$u - u' \in \operatorname{Ker} f$ であれば $V(u) = V(u')$ である（から，U の元を $V(u)$ と表す方法は一般には一意的ではない）ことに注意せよ．今までの考察から，U は W と，従って $\operatorname{Im} f$ と同型である．

11) $F\colon U \to K^m$ を，$F(V(u)) = f(u)$ により定めると，well-defined であることを示せ．

12) $F = F'$ が成り立つことを示せ．

$u - u' \in \operatorname{Ker} f$ の時（，その時のみ）u と u' を同一と看做すことにより K^n から新たな線型空間 U が得られる．この U を通常は $K^n/\operatorname{Ker} f$ で表し，K^n の $\operatorname{Ker} f$ による商（線型）空間と呼ぶ．この問で，全体としては，同型 $U = K^n/\operatorname{Ker} f \cong W \cong \operatorname{Im} f$ が得られたことになる．さらに，同型 $K^n/\operatorname{Ker} f \to \operatorname{Im} f$ は，f を用いて $F(V(u)) = f(u)$ により与えられている．$K^n/\operatorname{Ker} f$ は f で写して同じ値になる K^n の元は同じと看做すことにして得られる空間である．従って，$K^n/\operatorname{Ker} f$ の元を区別する際に問題になるのは f で写した値が同一かどうか，である．その意味で，f を用いて $K^n/\operatorname{Ker} f$ から $\operatorname{Im} f$ への同型が与えられるのは極めて自然である．

問 7.3. V を K の元からなる数列全体のなす線型空間とする．

1) 係数を数列と看做すことにより定まる写像 $K[\,t\,] \to V$ は線型写像であることを示せ．より正確には，ここで言う写像は $f \in K[\,t\,]$ を $f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ と表して f に数列 $(a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$ を対応させる写像である．

2) 1) で与えた写像は線型同型写像ではないことを示せ．

[†1] 矢印の形に注意せよ．写像を元の対応を用いて表す際には $\to$ ではなく $\mapsto$ を用いるのであった．これは大切な規則である．もし $F\colon V(u) \to \operatorname{Im} f$ と書いたとすると，これは F は $V(u)$ の元に対して $\operatorname{Im} f$ の元を与える写像である，という意味である．これは今考えていることと全く異なる．

V の元を表すためには「無限個」(「自然数個」) の K の元が必要である．一方，$K[t]$ の元を表すためにも,「無限個」(「自然数個」) の K の元が必要である．実際，いくらでも次数が高い多項式があるから，どのような多項式でも表せるようにしようとすると，無限個の K の元を用意できる状態にしておかないと無理である．さて，V の元を（一つ）表すために必要な K の元の（無限個の）組には制約がない．ところが，$K[\,t\,]$ の元を（一つ）表すためには有限個の（次数 $+1$ 個の）K の元があれば十分である（正確には，必要な K の元の数のうち，0 でないものは有限個である）．このように，全体として元を表すのに必要な K の元の個数を（今の場合「自然数個」）指定しても，個々の元を表すのに必要な K の元の個数には差があり,「無限」といっても区別が必要である．数列の場合は「直積」と呼ばれる場合の，多項式の場合は「直和」と呼ばれる場合の代表例である．

問 7.4. 1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ と置き，$f\colon K^5 \to K^3$ を $f(v) = Av$ により定める．

a) $\operatorname{Ker} f$ を求めよ．

b) $\operatorname{Im} f$ を求めよ．

c) $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ と置く．$f^{-1}(\{c\})$ を求めよ．

2) $\varphi\colon K[\,t\,] \to K[\,t\,]$ を $\varphi(f)(t) = t\dfrac{df}{dt}(t) - f(t)$ により定める．$\operatorname{Ker}\varphi$ を求めよ（簡潔に表せ）．

ヒント：微分方程式を解いても良いが，それが良い方法とは限らない．

3)
$$
\begin{aligned}
&K[\,t, s\,] \\
&= \{K \text{ の元を係数とする，} t \text{ と } s \text{ に関する多項式全体}\} \\
&= \left\{ \sum_{n,m\in\mathbb{N}} a_{nm} t^n s^m \,\middle|\, \begin{array}{l} a_{nm} \in K,\ \text{ただし} \\ \exists\, N, M \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \text{ または } m \geq M \text{ ならば } a_{nm} = 0 \end{array} \right\}
\end{aligned}
$$

とする．ただし，t, s によらず $t^0 = 1,\ s^0 = 1$ と定める．$K[\,t, s\,]$ は多項式の和，定数倍に関して線型空間である（認めて良いが，一度は確かめること）．$\varphi\colon K[\,t, s\,] \to K[\,t, s\,]$ を $f \in K[\,t, s\,]$ について $\varphi(f)(t, s) = f(t, s)ts$ により定める．$\operatorname{Ker}\varphi$ と $\operatorname{Im}\varphi$ を求めよ．また，$\psi\colon K[\,t, s\,] \to K[\,t, s\,]$ を $f \in K[\,t, s\,]$ について $\psi(f)(t, s) = s\dfrac{\partial f}{\partial t}(t, s)$ により定まる．$\operatorname{Ker}\psi$ と $\operatorname{Im}\psi$ を求めよ．

問 7.5. $A \in M_{m,n}(K)$ とし，$f\colon K^n \to K^m$ を $f(v) = Av$ により定める．$\dim K^n - \dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rank} A$ が成り立つことを示せ．

問 7.6 (陰函数定理の簡単な場合)**.** $A \in M_{m,n}(K)$ とし，$\operatorname{rank} A = m$ とする．また，$f\colon K^n \to K^m$ を $f(v) = Av$ により定める．

1) $n \geq m$ が成り立つことを示せ．

2) f は全射であることを示せ．

3) ある線型写像 $g\colon K^m \to K^n$ が存在して $f \circ g = \mathrm{id}$ が成り立つことを示せ．また，g を K^m から $\mathrm{Im}\, g$ への写像と看做すと線型同型写像であることを示せ．
※ 先に 3) を示してから 2) を示しても良い．

問 7.7. V, W を線型空間，$f, g\colon V \to W$ を線型写像とする．

1) $U = \{v \in V \mid f(v) = g(v)\}$ と置くと，U は V の部分線型空間であることを示せ．
2) $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g \subset U$ が成り立つことを示せ．

問 7.8. $a, b \in \mathbb{C}$ とし，$a = \alpha + \sqrt{-1}\beta,\ b = \gamma + \sqrt{-1}\delta$，ただし $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ とする．また，$f = f_{a,b}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を以下のように定める．まず $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とする．そして $z = x + \sqrt{-1}y$ と置き，$w \in \mathbb{C}$ を $w = az + b\bar{z}$ により定める．最後に，$w = t + \sqrt{-1}s,\ t, s \in \mathbb{R}$ と表して $f(v) = \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix}$ とする．

1) f は $\mathbb{R}$-線型写像であることを示せ．
2) 標準基底に関する f の表現行列を簡潔に表せ．
3) f が $\mathbb{R}$-線型同型写像であるための a, b に関する必要十分条件を求めよ．

定義 7.9. $A \in M_{m,n}(K)$ とする．A の適当な k 個の行と k 個の列を選んで $M_k(K)$ の元を作る．これを B とし，$\det B$ を考える．このようにして得られる行列式を A の**小行列式**と呼ぶ．

例えば $A \in M_n(K)$ の余因子は A の小行列式（の特別なもの）に符号を付けたものであるし，A の行列式自体も小行列式の一つである．また，$A \in M_{m,n}(K)$ の成分は小行列式（の特別なもの）である．

問 7.10. $A = (a_1\ a_2\ a_3) \in M_3(\mathbb{R})$ とし，A の小行列式（20 個ある）の絶対値の最大値を M とする．また，$v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ とし，v_i 達の成分の絶対値の最大値を $d(v_1, v_2, v_3)$ とする．

1) $d = d(v_1, v_2, v_3) < 1$ とすると，$|\det(a_1 + v_1\ a_2 + v_2\ a_3 + v_3) - \det A| < (18M + 6)d$ が成り立つことを示せ．
ヒント：「18」は $20 - 2$,「6」は $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$ である．
2) $A = (a_1\ a_2\ a_3) \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ とする．$\exists \delta > 0$ s.t. $d(v_1, v_2, v_3) < \delta \Rightarrow (a_1 + v_1\ a_2 + v_2\ a_3 + v_3) \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ が成り立つことを示せ．
3) $\mathbb{R}$ を $\mathbb{C}$ としても 1)，2) と同じことが成り立つことを示せ．
4) $A \in M_n(K)$ あるいは $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ としても 1)，2) と同様のことが成り立つことを示せ（数字は多少変わる）．

問 7.10 により，正則な行列に十分近い成分を持つ行列も正則であることが分かる．

（以上）