２０１３年度数学 II 演習（理 I 37–39 組）　第５回　　　　　　　　　'13/6/11（火）４限

以下では特に断らない限り $K=\mathbb{R}$ もしくは $K=\mathbb{C}$ とする．

注. １．発表に限らず，解答を作成する際には「明らか」乃至これに類する文言は原則として用いないこと．
２．よく分からなくなってしまったら，まずは K を $\mathbb{R}$ と読み替え，K^n は $\mathbb{R}^n$ あるいは $\mathbb{R}^2$，$\mathbb{R}^3$ 位に考えておき，改めて一般の場合を考えてみよ．
３．ヒントは多くの場合非自明な主張からなる．ヒントに書いてあることもきちんと証明すること．

問 5.1. 次の行列はいずれも正則である．逆行列と行列式を求めよ．また，各々の行列を基本行列の積として表せ．

$$1)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad 2)\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 10 \end{pmatrix} \qquad 3)\ \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 2-\sqrt{-1} & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & -4-3\sqrt{-1} & -1+4\sqrt{-1} \end{pmatrix}$$

問 5.2. a_{ij} を (i,j) 成分とする $M_n(K)$ の元 A について，$\operatorname{tr} A = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{kk}$ と定め，A の**トレース**（trace）あるいは跡（せき）と呼ぶ．

1) $A\in M_{m,n}(K)$, $B\in M_{n,m}(K)$ とするとき，$\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)$ が成り立つことを示せ．
2) $A\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ とすると $\operatorname{tr}({}^tAA)\geq 0$ が成り立つことを示せ．また，等号が成り立つような A を全て求めよ．
3) $A\in M_{m,n}(\mathbb{C})$ とすると $\operatorname{tr}({}^t\bar{A}A)\geq 0$ が成り立つことを示せ．また，等号が成り立つような A を全て求めよ．

問 5.3. $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ について K-線型写像 $f_\sigma\colon K^n\to K^n$ を

$$f_\sigma\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\sigma(1)} \\ x_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ x_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$$

により定める．f_σ の表現行列を求めよ．また，表現行列を F_σ とするとき $\det F_\sigma$ を求めよ．

問 5.4. $A\in M_{m,n}(K)$ とし，$A=(a_1\ \cdots\ a_n)$ と K^m の元 $a_1,\dots,a_n$ を用いて表す．$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(a_1\ \cdots\ a_{n-1}) = n-1$ が成り立つならば，適当な $\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1}\in K$ が存在して $a_n=\lambda_1a_1+\cdots+\lambda_{n-1}a_{n-1}$ が成り立つことを示せ．

ヒント:例えば次のように考えることが出来る．A の第１列から第 $(n-1)$ 列までに着目し $A'=(a_1\ \cdots\ a_{n-1})$ と置く．$A=(A'\ a_n)$ であって，$\operatorname{rank} A'=n-1$ である．右基本変形により A の A' の部分を列階段行列に

直す．この状態からさらに右基本変形により A 全体を列階段行列に直したときどのような作業で，最終的にどのような形になるか考えてみよ．

問 5.5. $A \in M_{m,n}(K)$ とする．$i_1 < i_2 < \cdots < i_r$，$j_1 < j_2 < \cdots < j_r$ を正の整数とし，A から第 i_1 行，…，第 i_r 行および第 j_1 列，…，第 j_r 列を取り出して（取り去るのではない）得られる $M_r(K)$ の元を $A_{i_1,\cdots,i_r;j_1,\cdots,j_r}$ で表す（このような行列を r 次小行列などと呼ぶ）．ある $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$，$j_1 < j_2 < \cdots < j_r$ について $\det A_{i_1,\cdots,i_r;j_1,\cdots,j_r} \neq 0$ であることと，$\operatorname{rank} A \geq r$ であることは同値であることを示せ．

ヒント：基本変形により行列のランクは不変なのであった．

問 5.6. $A = (a_1 \ \cdots \ a_n) \in M_n(K)$ とし，$f \colon K^n \to K^n$ を

$$f(v) = \begin{pmatrix} \det(v & a_2 & \cdots & & a_n) \\ \det(a_1 & v & a_3 & \cdots & a_n) \\ & & \vdots & & \\ \det(a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & v\,) \end{pmatrix}$$

により定める．

1) f は K-線型写像であることを示せ．また，$\forall v \in K^n$，$f(v) = Bv$ が成り立つような $B \in M_n(K)$ を求めよ．
2) f が K-線型同型写像であることと，$\det A \neq 0$ であることは同値であることを示せ．
3) $\det A \neq 0$ とする．$\forall w \in K^n$，$f^{-1}(w) = Cw$ が成り立つような $C \in M_n(K)$ を求めよ．

問 5.7. $A \in M_n(K)$ とする．A の余因子行列を $\widetilde{A}$ で表す．

1) $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ であるとき，$\det \widetilde{A}$ を求めよ．
2) $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ であるとき，$\widetilde{(\widetilde{A})} = (\det A)^{n-2} A$ であることを示せ．
3) $n > 2$ とする．$A \notin \mathrm{GL}_n(K)$ のとき，$\widetilde{(\widetilde{A})} = O_n$ であることを示せ．

ヒント：（少なくとも）二通りの方針があり得る．例えばまず $\operatorname{rank} A$ により場合分けをする．$\operatorname{rank} A < n-1$ の時には問 5.5 を用いれば $\widetilde{A} = O_n$ であることが容易に示せる．$\operatorname{rank} A = n-1$ の時には問 5.4 と，行列式の性質を用いると $\widetilde{A}$ が特別な形をしていることがわかり，$\operatorname{rank} A < n-1$ の場合に帰着できる．あるいは，まず対応 $A \mapsto \widetilde{(\widetilde{A})}$ が $A \in M_n(K)$ の函数として（つまり n^2 個の変数の函数として）連続であることを示す．次に，任意の $A \in M_n(K)$ についてある正則な行列の列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ であって $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = A$ なるものが存在することを示す．これらのことと 2) を用いて主張を示すことができる（多変数の函数の連続性について未習であると後者の方針で示すのは難しい）．

問 5.8. $A \in M_n(K)$ とし，$v \in K^n$ に関する方程式 $Av = 0$ を考える．

1) $Av = 0$ が $v = 0$ 以外の解を持つことと，$\operatorname{rank} A < n$ が成り立つことは同値であることを示せ．また，これらの条件は $\det A = 0$ が成り立つことと同値であることを示せ．

2) $\lambda \in K$ とする．$Av = \lambda v$ が $v = 0$ 以外の解を持つことと，$\det(\lambda E_n - A) = 0$ が成り立つことは同値であることを示せ．

問 5.8 の 2) が示唆するように，多項式 $\det(tE_n - A)$ あるいは方程式 $\det(tE_n - A) = 0$ は重要である．これらをそれぞれ A の**固有（特性）多項式**，**固有（特性）方程式**と呼ぶ．これらは冬学期に詳しく扱うので，ここではごく基本的なことを考える．

問 5.9. $A \in M_n(K)$ とする．

1) A の固有多項式は n 次多項式であって，最高次の項の係数は 1 に等しいことを示せ．
2) A の固有多項式の $(n-1)$ 次の項の係数は $-\operatorname{tr} A$ に等しいことを示せ．
3) A の固有多項式の定数項は $(-1)^n \det A$ に等しいことを示せ．

問 5.10. $A \in M_n(K)$ とする．$v_1, \ldots, v_n \in K^n$，$\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ とし，$Av_i = \lambda_i v_i$ が $i = 1, \ldots, n$ について成り立つとする．このとき，各 λ_i は A の固有方程式の解であることを示せ．また，$P = (v_1 \ \cdots \ v_n) \in \mathrm{GL}_n(K)$ であるとするとき，$P^{-1}AP$ を求めよ．

$A \in M_n(K)$ が K-上**対角化可能**であるとは，ある $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ が存在して $P^{-1}AP$ が対角行列となることを言う．問 5.10 のような v_i，λ_i が存在することは，A が対角化可能であるための条件の一つである．固有方程式は一般には 2 次以上の方程式である．従って $A \in M_n(\mathbb{R})$ であっても A の固有値が実数ではないことがある．このような時には，A の対角化は（$A \in M_n(\mathbb{C})$ と考えて）複素数の範囲で行わないといけない．この講義・演習で扱うほとんどのことは $K = \mathbb{R}$ であっても，$K = \mathbb{C}$ であっても同様であるが，このように，固有値に関わることについては差が生じる．

対角化に関しては固有値が実数かどうか以外にも気にすべきことがある．

問 5.11. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．

1) A の固有方程式の解は 1 のみであることを示せ．
2) $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^2$ を $Av_1 = v_1$，$Av_2 = v_2$ であって，かつ $(v_1 \ v_2) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ であるように取ることはできないことを示せ．

つまり，問 5.11 の A は対角化可能ではない（対角化不可能である）．行列の対角化については後期で詳しく扱う．

問 5.12 (問 4.18 も参照のこと)**.** $A \in M_n(K)$ の時，

$$\exp A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k = E_n + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \cdots$$

と置く（A によらず $A^0 = E_n$ と定める）．$\exp\colon M_n(K) \to \mathrm{GL}_n(K)$ を（行列の）**指数函数**と呼ぶ（$\exp A \in \mathrm{GL}_n(K)$ であることは後で確かめる）．定義における無限和が意味を持つ（収束する）かどうか問題であるが，ここではおおらかに考える．以下の計算では

無限個の項が必然的に現れるが，収束については気にせず，多項式のように計算すればよい．興味があれば収束に関しても調べること[†1].

1) $A \in M_n(K),\ P \in \mathrm{GL}_n(K)$ とする．このとき，$\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}(\exp A)P$ が成り立つことを示せ．
2) $A, B \in M_n(K)$ とする．$AB = BA$ であれば $(\exp A)(\exp B) = (\exp B)(\exp A) = \exp(A+B)$ が成り立つことを示せ．
3) $AB \neq BA$ が成り立つような $A, B \in M_n(K)$ であって，$(\exp A)(\exp B)$, $(\exp B)(\exp A)$, $\exp(A+B)$ のうちどの二つも一致しない物を一組挙げよ．
4) $A \in M_n(K)$ とする．$\exp A$ には逆行列が存在し，それは $\exp(-A)$ に等しいことを示せ．
   ヒント：$\exp O_n = E_n$ が成り立つ．
5) $A \in M_n(K)$ とする．${}^t\exp A = \exp {}^tA$ が成り立つことを示せ．
6) $A \in M_n(K),\ t \in \mathbb{R}$ とする．$g(t) = \exp tA$ と置くと，$\dfrac{dg}{dt}(t) = A(\exp tA) = (\exp tA)A$ が成り立つことを示せ．
7) $A, B \in M_n(K)$ について $[A, B] = AB - BA$ と定める．$t \in \mathbb{R}$ について $X(t) = (\exp tA)B(\exp(-tA))$ と置くと，$\dfrac{dX}{dt}(0) = [A, B]$ が成り立つことを示せ．ただし，行列値函数の微分は成分ごとに微分を取ることにより定める．
8) $A \in M_n(K)$ とする．$\det \exp A = e^{\mathrm{tr}\, A} (= \exp \mathrm{tr}\, A)$ が成り立つことを示せ．
   ヒント：A の三角化（冬学期に（恐らく）扱う）について調べて，それを用いても良いし（ここでは「定理」をきちんと調べれば内容は認めて良い），あるいは，問 4.18 を用いることもできる．

問 5.13. 1) A を上三角（下三角）行列とする．$\exp A$ も上三角（下三角）行列であることを示せ．
2) A を対角行列とする．$\exp A$ も対角行列であることを示せ．
3) $A \in M_n(K)$ は ${}^tA + A = O_n$ をみたすとする（このような行列を n 次の**歪対称行列**と呼ぶ）．このとき，$X = \exp A$ と置くと ${}^tXX = X\,{}^tX = E_n$ が成り立つことを示せ．
4) $A \in M_n(K)$ は ${}^tA = A$ をみたすとする（このような行列を n 次の**対称行列**と呼ぶ）．このとき，$X = \exp A$ と置くと X も対称行列であることを示せ．
5) $A \in M_n(K)$ は $\mathrm{tr}\, A = 0$ をみたすとする．このとき，$\det \exp A = 1$ が成り立つことを示せ．

（以上）

[†1]数学 IA・IB を修了した時点では証明できることであるが，夏学期の内容だけでは講義の進み方（順序）によっては難しいかも知れない．