２０１３年度数学 II 演習（理 I 37–39 組）　第３回　　　　'13/5/14（火）４限
訂正：'13/5/14 問 3.5 を修正．

以下では特に断らない限り $K=\mathbb{R}$ もしくは $K=\mathbb{C}$ とする．

注． １．発表に限らず，解答を作成する際には「明らか」乃至これに類する文言は原則として用いないこと．
２．よく分からなくなってしまったら，まずは K を $\mathbb{R}$ と読み替え，K^n は $\mathbb{R}^n$ あるいは $\mathbb{R}^2$，$\mathbb{R}^3$ 位に考えておき，改めて一般の場合を考えてみよ．
３．ヒントは多くの場合非自明な主張からなる．ヒントに書いてあることもきちんと証明すること．

問 3.1 (複素平面（ガウス平面）[†1]). $z\in\mathbb{C}$ は $z=x+\sqrt{-1}y$ と $x,y\in\mathbb{R}$ を用いて表すことができる．この表し方は（定義により）一意的である．$x=\operatorname{re}z,\ y=\operatorname{im}z$ と表し，それぞれ z の**実部**，**虚部**と呼ぶ．なお，記号「im」については，後で極めてよく似た記号「Im」が全く異なる意味で用いられるので注意が必要である（通常は前後から区別はつく）．

1) $\mathbb{C}$ は $\mathbb{R}$-線型空間であることを示せ．
2) $\varphi\colon\mathbb{C}\to\mathbb{R}^2$ を $\varphi(z)=\begin{pmatrix}\operatorname{re}z\\ \operatorname{im}z\end{pmatrix}$ により定める．φ は $\mathbb{R}$-線型同型写像であることを示せ．また，φ^{-1} を求めよ．

ところで，$\mathbb{C}$ は（当たり前の方法で） $\mathbb{C}$-線型空間である．和に関しては $\mathbb{R}$-線型空間と考えたときと同じ演算であるから，これと φ の関係は上の問（の答え）で決着がついている．そこで積と φ の関係について考える．$\alpha\in\mathbb{C}$ とする．このとき，$\mu_\alpha\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を $\mu_\alpha(z)=\alpha z$ により定め，また，$\tau_\alpha\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ を $v\in\mathbb{R}^2$ について

$$\tau_\alpha(v)=\varphi(\alpha(\varphi^{-1}(v)))=\varphi\circ\mu_\alpha\circ\varphi^{-1}(v)$$

と置くことにより定める．

3) μ_α は $\mathbb{C}$-線型写像であることを示せ．
4) τ_α は $\mathbb{R}$-線型写像であることを示せ．
5) μ_α が $\mathbb{C}$-線型同型写像であることと，$\alpha\neq0$ であることは同値であることを示せ．
6) τ_α が $\mathbb{R}$-線型同型写像であることと，$\alpha\neq0$ であることは同値であることを示せ．
7) $A_\alpha=(a_{ij})\in M_2(\mathbb{R})$ を条件
$$\begin{pmatrix}a_{11}\\ a_{21}\end{pmatrix}=\tau_\alpha(e_1),\quad\begin{pmatrix}a_{12}\\ a_{22}\end{pmatrix}=\tau_\alpha(e_2)$$
により定める．ここで $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ は $\mathbb{R}^2$ の基本ベクトルである．A_α を求めよ．
8) $\alpha\in\mathbb{C}$ について，A_α を 7) のように定める．$\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ について $A_{\alpha+\beta}=A_\alpha+A_\beta$ 及び $A_{\alpha\beta}=A_\alpha A_\beta$ が成り立つことを示せ．

[†1]複素数平面と呼ぶこともあるが，高校までの教科書用の名称だと思う．

問 3.2. 基本行列 $P_n(i;\lambda)$, $Q_n(i,j)$, $R_n(i,j;\mu)$ を講義（教科書）と同様に定める．

1) $Q_n(i,j) = P_n(i;-1)R_n(j,i;1)R_n(i,j;-1)R_n(j,i;1)$ が成り立つことを示せ．従って左基本変形を考える際には $P_n(i;\lambda)$ と $R_n(i,j;\mu)$ を左からかける操作のみを考えてもよい．
2) $i<j$ とする．$R_n(j,i;\mu) = Q_n(i,j)R_n(i,j;\mu)Q_n(i,j)$ が成り立つことを示せ．従って左基本変形を考える際には，$P_n(i;\lambda)$，$Q_n(i,j)$ と $R_n(i,j;\mu)$，ただし $i<j$，を左から掛ける操作のみを考えても良い．
3) 1) と 2) は別の話である．あわせてしまって，$P_n(i;\lambda)$，$R_n(i,j;\mu)$，ただし $i<j$，を左から掛ける操作のみを考えると，例えば $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ は階段行列には左基本変形で変形できないことを示せ．

問 3.3. $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ とする．

1) A の第 i 行を $\lambda(\neq 0)$ 倍して得られる行列を B とする．$B \in \mathrm{GL}_n(K)$ が成り立つことを示せ．また，B^{-1} は A^{-1} にどのような基本変形を施して得られるか，簡潔に述べよ．
2) A の第 i 行と第 j 列（$i \neq j$）を入れ替えて得られる行列を B とする．$B \in \mathrm{GL}_n(K)$ が成り立つことを示せ．また，B^{-1} は A^{-1} にどのような基本変形を施して得られるか，簡潔に述べよ．
3) A の第 i 行に第 j 列（$i \neq j$）の μ 倍を加えて得られる行列を B とする．$B \in \mathrm{GL}_n(K)$ が成り立つことを示せ．また，B^{-1} は A^{-1} にどのような基本変形を施して得られるか，簡潔に述べよ．

定義 3.4. V を K-線型空間とする．$v_1, \ldots, v_n \in V$ が**線型独立**（一次独立）であるとは，

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K,\ \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$$

が成り立つことを言う．$v_1, \ldots, v_n$ が線型独立でないことを，$v_1, \ldots, v_n$ は**線型従属**（一次従属）であると言う．

問 3.5. $A \in M_n(K)$ とし，$V = \{v \in K^n \mid Av = 0\}$ と置く．

1) $V = \{0\}$ が成り立つことと，$A \in \mathrm{GL}_n(K)$ が成り立つことは同値であることを示せ．
2) $A = (a_1\ \cdots\ a_n)$ と列ベクトルを用いて表す．$a_1, \ldots, a_n$ が線型独立であることと $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ が成り立つことは同値であることを示せ．

問 3.6. $A \in M_n(K)$ とし，ある $m \in \mathbb{N}$ について $A^m = O_n$ が成り立つとする．ただし，A によらず $A^0 = E_n$ と定める．

1) A は正則ではないことを示せ．
2) $A^r = O_n$ かつ $A^{r-1} \neq O_n$ が成り立つような $r \in \mathbb{N}$ がただ一つ存在することを示せ．
3) r を 2) のように定めると，$E_n + A + \cdots + A^{r-1} \in \mathrm{GL}_n(K)$ が成り立つことを示せ．また，逆行列を求めよ．

4) r を 2) のように定める．$v_0 = e_i, v_1 = Ae_i, \ldots, v_{r-1} = A^{r-1}e_i$ と置くと，$v_0, \ldots, v_{r-1}$ は線型独立であることを示せ．
ヒント：$\lambda_0 v_0 + \cdots + \lambda_{r-1}v_{r-1} = 0$ と仮定する．まず A^{r-1} を両辺に左から掛けてみよ．

問 3.7. $A \in M_{m,n}(K)$ とし，$V = \{X \in M_n(K) \mid AX = O_{m,n}\}$ と置く．

1) V は $M_n(K)$ の部分線型空間であることを示せ．$M_n(K)$ が K-線型空間であることは認めて良い．
2) X の各列は $Av = 0$ の解であることを示せ．
3) $X \in V$ とすると $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} X \leq n$ が成り立つことを示せ．

定義 3.8. V を K-線型空間とする．V の部分集合 W が V の ***K*-部分線型空間**であるとは，次の条件がみたされることを言う．

1) $W \neq \varnothing$ が成り立つ．
2) $w_1, w_2 \in W$ であれば $w_1 + w_2 \in W$ が成り立つ．
3) $w \in W,\ \lambda \in K$ であれば $\lambda w \in W$ が成り立つ．

条件 2) と 3) に於いて，和や定数倍は V における和や定数倍である．これらが W に属することから，V に於ける和や定数倍を W に於ける和や定数倍と考えることができる．

問 3.9 (問 2.18 も参照のこと). 上のように W の和と定数倍を定義すると W は K-線型空間であることを示せ．

問 3.10. $A \in M_{m,n}(K),\ w \in K^m$ とし，

$$V_w = \{v \in K^n \mid Av = w\}$$

と置く．V_w は $Av = w$ の解空間である．

1) $w = 0$ とする．$V_w = V_0$ は K^n の K-部分線型空間であることを示せ．従って V_0 は K-線型空間である．
2) $w \neq 0$ とする．V_w は K-線型空間では無いことを示せ．

以下では $V_w \neq \varnothing$ とし，$v_0 \in V_w$ とする．

3) $F_{v_0}\colon V_w \to K^n$ を $F_{v_0}(v) = v - v_0$ により定める．すると，実際には F_{v_0} は V_w から V_0 への写像であることを示せ．
ヒント：$F_{v_0}(v)$ は表向き K^n の元であるが，実際には V_0 の元であることを示せ，というのと同じ意味である．
4) $G_{v_0}\colon V_0 \to K^n$ を $G_{v_0}(v) = v + v_0$ により定める．すると，実際には G_{v_0} は V_0 から V_w への写像であることを示せ．
5) $G_{v_0} \circ F_{v_0} = \mathrm{id}_{V_w}$，$F_{v_0} \circ G_{v_0} = \mathrm{id}_{V_0}$ がそれぞれ成り立つことを示せ．

従って，F_{v_0}（と G_{v_0}）を用いて V_0 と V_w は少なくとも集合としては同一視できる．実際にはこの同一視は線型同型に近い同一視であるが，$w \neq 0$ の時には V_w は K-線型空間では無いから線型同型とは少し異なる（アフィン同型と呼ばれる）．

問 3.11. $A \in M_{m,n}(K),\ w \in K^m$ とし，

$$V_w = \{v \in K^n \mid Av = w\}$$

と置く（問 3.10 と同じ）．また，$W = \{w \in K^m \mid v \in K^n,\ Av = w\text{ は解を持つ }\} = \{w \in K^m \mid V_w \neq \varnothing\}$ と置く．

1) W は K^m の K-部分線型空間であることを示せ．
   ヒント：$W = \{w \in K^m \mid \exists v \in K^n \text{ s.t. } w = Av\}$ が成り立つ（なぜか？）．
2) $v_1 \in V_{w_1}, v_2 \in V_{w_2}$ とすると，$v_1 + v_2 \in V_{w_1+w_2}$ が成り立つことを示せ．また，$v \in V_w,\ \lambda \in K$ とすると $\lambda v \in V_{\lambda w}$ が成り立つことを示せ．
3) $w \in W$ について $[V_w]$ という記号を形式的に考え，$[V] = \{[V_w] \mid w \in W\}$ と置く．2) を踏まえて，$[V_{w_1}], [V_{w_2}] \in [V]$ について $[V_{w_1}] + [V_{w_2}] = [V_{w_1+w_2}]$ とし．$[V_w] \in [V],\ \lambda \in K$ について $\lambda[V_w] = [V_{\lambda w}]$ とする．$[V]$ はこの演算に関して K-線型空間であることを示せ．
4) $f\colon [V] \to W$ を $f([V_w]) = w$ により定めると，K-線型写像であることを示せ．また，f は K-線型同型写像であることを示せ．
5) U を K-線型空間，$g\colon K^n \to U$ を K-線型写像とし，$v \in V_0$ であれば $g(v) = 0$ が成り立つとする．$[V_w] \in [V]$ について，$v \in V_w$ を一つ選び，$g(v) \in U$ を考える．このようにして得られる U の元は $v \in V_w$ の選び方によらないことを示せ．従って $[V]$ から U への写像が決まるので，これを $\bar{g}$ で表すことにする．$\bar{g}$ は K-線型写像であることを示せ．
6) 5) で $U = W$，$g(v) = Av$ とすると $\bar{g}$ として 3) の f が得られることを示せ．

斉次連立一次方程式の解空間や，$Av = w$ が解を持つ $w \in K^m$ 全体がなす線型空間は，「線型写像の核，像」と呼ばれるものの特別な場合である．一般の場合には後期で扱うので，ここでは特別な場合について述べておく．

定義 3.12. $A \in M_{m,n}(K)$ とし，$f\colon K^n \to K^m$ を $f(v) = Av$ により定める．

1) $Av = 0$ の解空間 $\{v \in K^n \mid Av = 0\}$ を f の**核**（kernel）と呼び，$\operatorname{Ker} f$ で表す．f の核は K^n の K-部分線型空間である．
2) $Av = w$ が解を持つような $w \in K^m$ 全体がなす K^m の部分集合を f の**像**（image）と呼び，$\operatorname{Im} f$ で表す（$z \in \mathbb{C}$ の虚部 $\operatorname{im} z$ とは異なるので注意せよ）．f の像は K^m の K-部分線型空間である．

（以上）