２０１３年度数学 II 演習（理 I 37–39 組）　第１回　　　　'13/4/9（火）４限
訂正:'13/4/23 定義 1.8 の写像 g に関して誤植を修正.

以下では特に断らない限り $K=\mathbb{R}$ もしくは $K=\mathbb{C}$ とする.

注. よく分からなくなってしまったら，最初はいつも K を $\mathbb{R}$ と読み替え，K^n は $\mathbb{R}^n$ あるいは $\mathbb{R}^2$，$\mathbb{R}^3$ 位に考えておき，改めて一般の場合を考えてみよ.

定義 1.1 (線型空間の公理). V を空でない集合とする. V が ***K*-線型空間（*K*-ベクトル空間）**であるとは，以下の条件が成り立つことを言う.

I) V の任意の元 v,w について，v と w の和と呼ばれる V の元 $v+w$ が定まる.

II) V の任意の元 v と，K の任意の元 λ について，v の λ 倍と呼ばれる V の元 λv が定まる.

III) そして，これらの演算が以下の性質を持つ.

1) $\forall v,w,z\in V,\ (v+w)+z=v+(w+z)$.
2) $\forall v,w\in V,\ v+w=w+v$.
3) 零ベクトルと呼ばれる元 o が V に存在し，$\forall v\in V,\ v+o=o+v=v$ が成り立つ[†1].
4) V の任意の元 v について，ある V の元 w が存在して $v+w=o$ をみたす.
※この w は唯一であることが証明されるので，$-v$ で表す. $-v=(-1)v$ が成り立つ.
5) $\forall\lambda,\mu\in K,\ \forall v\in V,\ (\lambda+\mu)v=\lambda v+\mu v$.
6) $\forall\lambda\in K,\ \forall v,w\in V,\ \lambda(v+w)=\lambda v+\lambda w$.
7) $\forall\lambda,\mu\in K,\ \forall v\in V,\ (\lambda\mu)v=\lambda(\mu v)$.
8) $\forall v\in V,\ 1v=v$.

$\mathbb{R}$-線型空間を**実線型空間**，$\mathbb{C}$-線型空間を**複素線型空間**とも呼ぶ.

III) には条件がたくさんあるが，これらは要するに普段行っているような計算と似たような計算ができる（分配則や結合則が成り立つ）ということである. 最初のうちは特に意識することはない（例えば覚える必要はない）. 一方，条件 I) と II) はあまり条件には見えないかもしれないが，これらはむしろ本質的である（この講義・演習の範囲で実感することは少ないかも知れない）.

[†1] 2) が成り立つのでやや冗長に見えるかも知れないが，それなりに意味がある. また，この o は唯一であることが証明できるので，はじめから o は唯一であるとすることもある. ここではそのようにはしていない.

問 1.2. V が K-線型空間であるとき，$\forall v \in V,\ 0v = o$ が成り立つことを示せ．

問 1.3. K^n はベクトルの和と定数倍に関して K-線型空間であることを示せ[†2]．

問 1.4. $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ とし，$V = \{f\colon X \to \mathbb{R}\}$ とする．V は X から $\mathbb{R}$ への写像（X 上の函数）全体がなす集合である．$f, g \in V$ について，$f + g$（という名前の写像）を $k \in X$ について $(f + g)(k) = f(k) + g(k)$ により定め，また，$f \in V,\ \lambda \in \mathbb{R}$ について λf（という名前の写像）を $k \in X$ について $(\lambda f)(k) = \lambda f(k)$ により定める．

1) このように定めた演算に関して V は $\mathbb{R}$-線型空間であることを定義を確かめることにより直接示せ．
2) $f \in V$ であるとき，$\varphi(f) \in \mathbb{R}^n$ を $\varphi(f) = \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ \vdots \\ f(n) \end{pmatrix}$ と置くことにより定める．$f, g \in V,\ \lambda \in \mathbb{R}$ とするとき，$\varphi(f + g) = \varphi(f) + \varphi(g)$ および $\varphi(\lambda f) = \lambda\varphi(f)$ がそれぞれ成り立つことを示せ．
3) $\mathbb{R}$ を $\mathbb{C}$ に置き換えても 1), 2) と同様のことが成り立つことを示せ．

問 1.4 の 2) に着目する．φ は V の元に対して K^n の元を与える対応であるから，V から K^n への写像である．そして，条件

i) $\forall f, g \in V,\ \varphi(f + g) = \varphi(f) + \varphi(g)$.
ii) $\forall f \in V,\ \forall \lambda \in K,\ \varphi(\lambda f) = \lambda\varphi(f)$.

が成り立つ．線型空間においては，和と定数倍という演算が基本的（最も重要）であるが，上の条件は φ はこれらの演算と「うまくいっている」（整合的である，演算を保つ）．このような写像は線型空間を考える際には重要である（例えば定義 1.8 を参照のこと）．そこで次のように定める（定義 1.1 にあわせて記号を変えた）．

定義 1.5. V, W を K-線型空間とする．$f\colon V \to W$ が ***K*-線型写像**であるとは，

i) $\forall v, w \in V,\ f(v + w) = f(v) + f(w)$.
ii) $\forall v \in V,\ \forall \lambda \in K,\ f(\lambda v) = \lambda f(v)$.

が成り立つことを言う．

[†2] ひょっとして定義 1.1 の条件を全部確かめないといけなくて，なんと面倒な，と思うかも知れないが，「面倒」を回避する手段は本質的にはない．

問 1.6. n, m を正の整数とする．

1) $n \geq m$ とする．$f\colon K^n \to K^m$ を $f\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ により定める[†3]（a_m まで縦に並べて，そこで打ち切る）．f は K-線型写像であることを示せ．

2) $n < m$ とする．$f\colon K^n \to K^m$ を $f\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ により定める（a_n まで縦に並べると，成分が足りないので 0 を補う）．f は K-線型写像であることを示せ．

問 1.4 のように，一見異なる線型空間を「同じ」と考える（と都合がよい）ことがしばしばある．線型空間は加法と定数倍，およびそれらがみたす演算規則により特徴付けられる[†4]から，二つの線型空間 V, W が「同じ」であるためには，

1) V と W は集合としては「同じ」と考えることができて，
2) その,「同じ」と考える方法でそれぞれの演算が対応する

ことが必要かつ十分であると考えられる．これらをもう少し数学的に述べるために，集合として「同じ」とは何か考えてみる[†5]．

まず，気軽に「同じ」と言ってしまうと，問 1.4 のように，$V \neq \mathbb{R}^n$ であるが V と $\mathbb{R}^n$ を「同じ」であると考えたい，ということと，本当に $V = \mathbb{R}^n$ であることの区別ができなくなってしまうので，本当は同じではないかもしれないが，あたかも同じであると考えることを（K-線型）**同型**であると言うことにする（詳しくは定義 1.8 を見よ）．さて，V, W がもし同型であるならば,（気分としては V と W は「同じ」なのだから）v を V の元とすると，実質的には v を W の元であると考えることができるはずである．つまり，v に対応する W の元 w_v（v に対応するので,「v マーク」をつけたと考えればよい）が存在する．逆に，$w \in W$ ならば，w に対応する V の元 v_w が存在するはずである．ここで，V と W は「同じ」なのだから，$w_v \in W$ に対応する V の元は v でなければおかしい．つまり，$v_{w_v} = v$ が成り立つはずである．w_v を $f(v)$ と表し，v_w を $g(w)$ と表すことにするならば，$g(f(v)) = v$ ということになる．同じ理屈により $f(g(w)) = w$ でなければならない．一方,「演算が対応する」という条件は定義 1.5 を用いれば良さそうである．

[†3]本来は左辺は $f\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\right)$ とすべきであるが，うるさいので省略する．
[†4]「特徴付けられる」は数学用語である．ここでは「定義される」と考えておけばよい．
[†5]ここからしばらくは「気分」を説明しているのでやや厳密さには欠ける．

そこで次のように定める．

定義 1.7. V を集合とする．$v \in V$ に対して v 自身を与える対応を V から V（自身）への写像と考え，V の**恒等写像**と呼ぶ．V の恒等写像を id あるいは id_V で表す．

定義 1.8. V, W を K-線型空間とする．写像 $f \colon V \to W$ が ***K*-線型同型写像**であるとは，

1) ある写像 $g \colon W \to V$ が存在し，$g \circ f = \mathrm{id}_V$，$f \circ g = \mathrm{id}_W$ が成り立つ．ここで $g \circ f$ は $g \circ f(v) = g(f(v))$ により定まる写像であって，f と g の**合成（合成写像）**と呼ぶ（g と f の合成とは一般には一致しないので注意せよ）．
2) f と g はそれぞれ K-線型写像である．

ことをいう．また，K-線型空間 V, W が ***K*-線型同型**であるとは，V から W への K-線型同型写像が存在することをいう．V と W が K-線型同型であることを $V \cong W$ で表す．

問 1.9. V, W を K-線型空間とする．$V = W$ ならば $V \cong W$ が成り立つことを示せ．また，$V \neq W$ であるが，$V \cong W$ であるような K-線型空間 V, W の例で，問 1.4 とは異なるものを一つ挙げよ．

問 1.10. 1) 問 1.4 で定めた $\varphi \colon V \to \mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}$-線型同型写像であることを示せ．
2) 問 1.6 のように定めた f が $\mathbb{R}$-線型同型写像であるのは $n = m$ のとき，その時のみであることを示せ[†6]．

さて，問 1.4 では $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ としたが，ここで（景気よく）$X = \mathbb{R}$ の場合を考える．つまり，$V = \{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ とする（f は連続であるとか，そういったことはここでは仮定しない）．V の演算は同様に定める．即ち，

1) $f, g \in V$ について，$f + g \in V$ を $(f+g)(t) = f(t) + g(t)$（$t \in \mathbb{R}$）により定める．
2) $f \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$ について $\lambda f \in V$ を $(\lambda f)(t) = \lambda f(t)$（$t \in \mathbb{R}$）により定める．

問 1.11. 上の演算で V は $\mathbb{R}$-線型空間であることを示せ．

$\mathbb{R}$ 上の複素数値（$\mathbb{C}$-値）函数全体を考えれば $\mathbb{C}$-線型空間が得られる．一方，定義域は「何」-線型空間が得られるかという意味[†7]では重要ではない．$X = \mathbb{C}$ としても実数値（$\mathbb{R}$-値）函数全体を考えれば $\mathbb{R}$-線型空間が，複素数値函数全体を考えれば $\mathbb{C}$-線型空間がそれぞれ得られる．

問 1.12. 上に述べたことを確かめよ（3つある）．

（以上）

[†6] K^n と K^m が K-線型同型であるのは $n = m$ のとき，その時のみであることを後日示す．
[†7] きちんと述べるならば，基礎体 K が何であるか，という意味である．